

# Diseño de un controlador basado en observador para un sistema de torsión

Diego Carvajal, Juan Sánchez  
Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia  
Medellín, Colombia  
difcarvaialca@unal.edu.co

**Resumen** – Este artículo presenta el diseño de un controlador basado en observador para un sistema de torsión. Se propone un esquema de un controlador dinámico continuo para regular una clase de sistemas mecánicos totalmente actuados con fricción seca. El sistema físico se puede observar en la Fig. 1, y el cual es explicado por (1) y (2). En este caso, el objetivo de control es regular la variable no actuada, limitando las amplitudes de la posición y velocidad de la articulación sobre la que se ejecuta la acción. Se diseñará un observador de primer orden y posteriormente se verifican los resultados obtenidos por el controlador en modos deslizantes en comparación con un controlador PID. El desempeño de los controladores propuestos se ilustran con resultados numéricos y experimentales, para los cuales se tendrán en cuenta los siguientes factores: respuesta dinámica transitoria (rapidez y estabilidad relativa) y seguimiento de señales de referencia (error de estado estable).

**Índices** –Control por modos deslizantes, controlador PID, error de estado estable, estabilidad, fricción seca, variable, respuesta dinámica.

## I. INTRODUCCIÓN

La mayoría de modelos usados para desarrollar la teoría de control son lineales. De hecho, los modelos lineales son mucho más manejables que los no lineales, y pueden representar en forma precisa el comportamiento de sistemas reales en muchos casos útiles [1]. Sin embargo, la naturaleza es altamente no lineal.

Los modelos no lineales representan mucho mejor diversos comportamientos que los sistemas lineales clásicos, por esto el uso de modelos no lineales, así como su desarrollo en la teoría de control son de gran importancia para comprender algunos fenómenos, y esto hace que sean de mucho interés en el área de investigación.

Una forma de tratar un modelo no lineal para realizar un control es la linealización, es decir, el uso de un modelo lineal aproximado, el cual se da cerca de un punto de operación para diseñar un controlador. Pero esta metodología no siempre cumple con las especificaciones y requerimientos que algunos sistemas necesitan.

La existencia de modos deslizantes se da principalmente en los sistemas de estructura variable (VSS). Esto se puede explicar dado que si la trayectoria del sistema alcanza las proximidades de una región en la que existe un modo deslizante, el movimiento ya no se aleja de la región excepto posiblemente a través de las fronteras de la región [2].

La región a la cual el sistema es atraído se le llama superficie de deslizamiento, así cuando las condiciones

necesarias son cumplidas, el estado “desliza” sobre esta superficie, permaneciendo insensible a variaciones en los parámetros de la planta y a las perturbaciones externas, lo que lo hace idóneo para muchas aplicaciones en sistemas de control. Cuando se encuentra en modo deslizante un sistema puede tener cualquier comportamiento dinámico, así como tender hacia un punto de equilibrio asintóticamente estable dentro de la superficie de deslizamiento, o seguir una trayectoria de amplitud creciente que lo lleve a abandonar la región de deslizamiento [1].

El sistema de torsión implementado como aplicación en este artículo se aprecia en la Fig. 1.

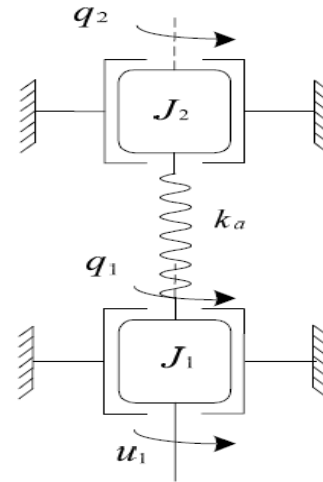


Fig. 1 Sistema de Torsión

## II. DESARROLLO TEÓRICO

### A. Modelo y parámetros

El modelo del sistema de torsión se puede apreciar en (1) y (2).

$$J_1 \ddot{q}_1 + k_a(q_1 - q_2) + f_a \dot{q}_1 = u_1 \quad (1)$$

$$J_2 \ddot{q}_2 - k_a(q_1 - q_2) + f_b \dot{q}_2 + J_2 c(\dot{q}_2) \text{sign}(\dot{q}_2) = 0 \quad (2)$$

De acuerdo al análisis anteriormente expuesto, se puede concluir que (1) y (2) comprometen las variables necesarias para llevar a cabo el diseño de un controlador basado en observador, además de los parámetros dados en la Tabla I.

**TABLA I**  
PARAMETROS SISTEMA DE TORSIÓN

Parámetro	Valor	Descripción
$J_1$	0.0193 Nms <sup>2</sup> /rad	Inercia primer bloque
$J_2$	0.0187 Nms <sup>2</sup> /rad	Inercia segundo bloque
$k_a$	3.2178 Nm/rad	Coefficiente de elasticidad del resorte
$f_a$	0.1373 Nm/rad	Coefficiente de fricción viscosa en el primer bloque
$f_b$	0.3 Nm/rad	Coefficiente de fricción viscosa en el primer bloque
$c$	3.7 rad/s <sup>2</sup>	Aceleración

Una superficie de deslizamiento está diseñada para solucionar un problema específico, y los resultados que se obtengan dependen en gran medida de esa superficie. Con esto, concluimos que este tipo de solución se da mediante un proceso de ajuste hasta obtener una respuesta satisfactoria. Para este caso en específico el objetivo es llevar a  $\dot{q}_2$  a un nivel deseado

### B. Observador Discontinuo

En este artículo se diseñará un observador de primer grado, el cual debe permitir tener una convergencia en tiempo finito de todas las variables de estado. Dicho de esta forma, la señal de control actúa sobre la derivada de la variable medida, con el fin de conservar todas las trayectorias sobre la región deslizante; esto se logra agregando un término discontinuo que permita al sistema rechazar perturbaciones, siendo así robusto e insensible. Además este tipo de observador permite trabajar con dinámicas de error de observación reducidas.

El diseño está basado en el modelo siguiente:

$$x_1 = q_1 \quad (3)$$

$$x_2 = \dot{q}_1 \quad (4)$$

$$x_2 = \dot{x}_1 \quad (5)$$

$$x_3 = q_2 \quad (6)$$

$$x_4 = \dot{q}_2 \quad (7)$$

$$x_4 = \dot{x}_3 \quad (8)$$

Obteniendo la representación del modelo en variables de estado, el sistema de torsión para realizar el observador signo por modos deslizantes, se puede expresar de la siguiente manera:

$$x_2 = \dot{x}_1 \quad (9)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{k_a(x_3 - x_1) - f_a x_2 + u}{J_1} \quad (10)$$

$$x_4 = \dot{x}_3 \quad (11)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{k_a(x_1 - x_3) - f_b x_4 - J_2 c(x_4) \text{sign}(x_4)}{J_2} \quad (12)$$

Para obtener el observador signo bastara con estimar algunas variables, así:

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 + K_1 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \quad (13)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \frac{k_a(\hat{x}_3 - \hat{x}_1) - f_a \hat{x}_2 + u}{J_1} + K_2 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \quad (14)$$

$$\hat{x}_3 = \hat{x}_4 + K_3 \text{sign}(x_3 - \hat{x}_3) \quad (15)$$

$$\dot{\hat{x}}_4 = \frac{k_a(\hat{x}_1 - \hat{x}_3) - f_b \hat{x}_4 - J_2 c(\hat{x}_4) \text{sign}(\hat{x}_4)}{J_2} + K_4 \text{sign}(x_3 - \hat{x}_3) \quad (16)$$

De donde los valores de las constantes  $K_1, K_2, K_3, K_4$  son:

$$K_1 = 150$$

$$K_2 = 80$$

$$K_3 = 60$$

$$K_4 = 50$$

### C. Controlador Discontinuo

El diseño del controlador por modos deslizantes se hace teniendo en cuenta la variable que se desea controlar ( $q_2$ ), la cual hace referencia a la posición del segundo bloque. Para esto se propone llevar el sistema a la siguiente forma:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (17)$$

$$\dot{x}_2 = f(x) + g(x)U \quad (18)$$

Definimos un valor de referencia para  $x_{4Ref}$ , como aquella velocidad a la que se quiere el segundo bloque, y con esto asegurar que el error sea cero en tiempo finito.

$$e_4 = x_4 - x_{4Ref} \quad (19)$$

Derivando (21) con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\dot{e}_4 = \dot{x}_4 - \dot{x}_{4Ref} \quad (20)$$

Posteriormente se obtiene:

$$\dot{e}_4 = \frac{k_a(\hat{x}_1 - \hat{x}_3) - f_b \hat{x}_4 - J_2 c(\hat{x}_4) \text{sign}(\hat{x}_4)}{J_2} - \dot{x}_{4Ref} \quad (21)$$

Haciendo  $\dot{e}_4 = 0$ , obtenemos un valor deseado para  $X_1$ , ya que es de ese valor deseado que podemos obtener un control sobre la variable de entrada U. Deseamos llevar la expresión a la siguiente forma:

$$\dot{e}_4 = -K e_4, \text{ con } K > 0 \quad (22)$$

$$x_{1des} = x_3 + \frac{f_b x_4}{k_a} + \frac{J_2 c(x_4) \text{sign}(x_4)}{k_a} - \frac{K_1 e_4 J_2}{k_a} + \frac{x_{4Ref} J_2}{k_a} \quad (23)$$

Definiendo ahora una superficie deslizante para  $x_1$  de la forma:

$$e_1 = x_1 - x_{1des} \quad (24)$$

Derivando (24) obtenemos:

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_{1des} \quad (25)$$

Hallamos la dinámica para  $e_2$ , de tal forma que se cumpla que  $\dot{e}_1 = -K_2 e_1$ .

$$x_{2des} = \dot{x}_{1des} - K_2 e_1 \quad (26)$$

$$e_2 = x_2 - x_{2des} \quad (27)$$

Deseamos que este error sea cero. Posteriormente con el valor de  $x_{2des}$  despejamos  $U$  del sistema y le agregamos un término robusto e insensible; por tanto sería:

$$\dot{x}_{2des} = \frac{k_a(\hat{x}_3 - \hat{x}_1) - f_a \hat{x}_2 + u}{J_1} \quad (28)$$

$$U = -k_a(x_3 - x_1) + f_a x_2 + J_1 x_{2des} - K_3 \text{sign}(e_2) \quad (29)$$

De esta forma el controlador me llevara al sistema a seguir la referencia.

### III. RESULTADOS

A continuación se mostraran los resultados obtenidos al aplicar un observador por modo deslizante de primer orden al modelo descrito por (1) y (2).

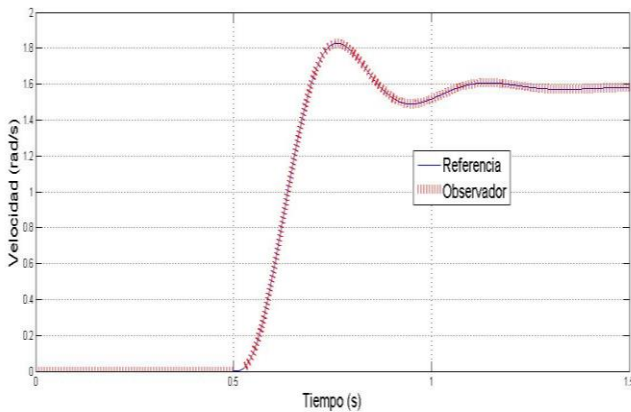


Fig. 2 Comportamiento del observador por modos deslizantes

El observador visto en la Fig. 2, es de vital importancia ya que es el referente para realizar el controlador, este responde muy bien ante cualquier cambio en la referencia.

A partir del comportamiento del observador, se implementó en primera instancia un controlador por modos deslizantes de primer orden (signo.)

Como podemos observar en la Fig. 3 el controlador responde muy bien ante la referencia escalón y esto demuestra que tanto el observador como el controlador mencionado bastan con ser de primer grado para cumplir con los objetivos esperados.

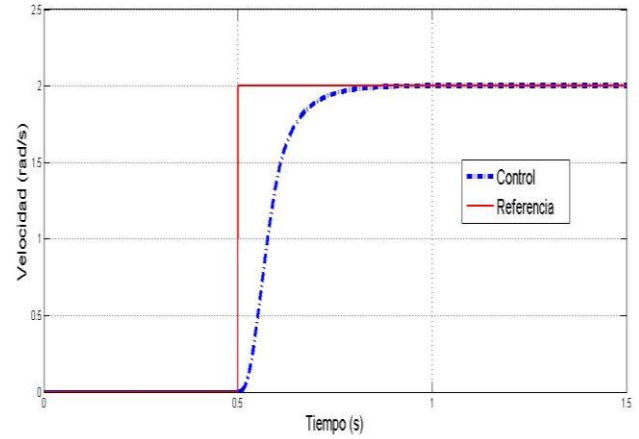


Fig. 3 Comportamiento del controlador frente a una referencia escalón

Sin embargo el esfuerzo de control se ve realmente afectado como se puede ver en la Fig. 4, ya que al ser el observador y el controlador tan cercanos al modelo de referencia, implica que la respuesta del sistema se vuelva crítica.

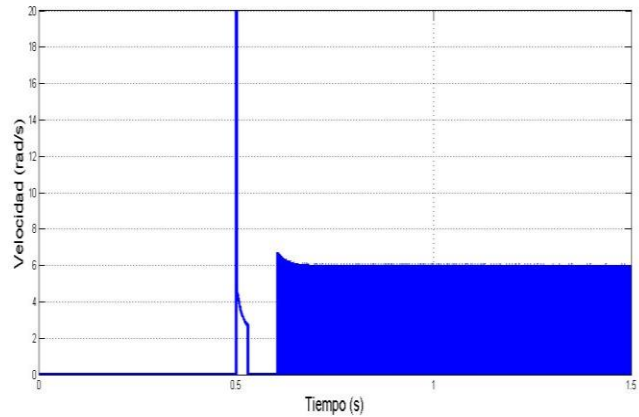


Fig. 4 Esfuerzo de control realizado por el controlador en modos deslizantes

El análisis de los errores del sistema es realmente importante, ya que en gran parte su resultado implica el funcionamiento que está teniendo el sistema con el controlador. Dichos efectos se pueden ver en las Fig. 5-7.

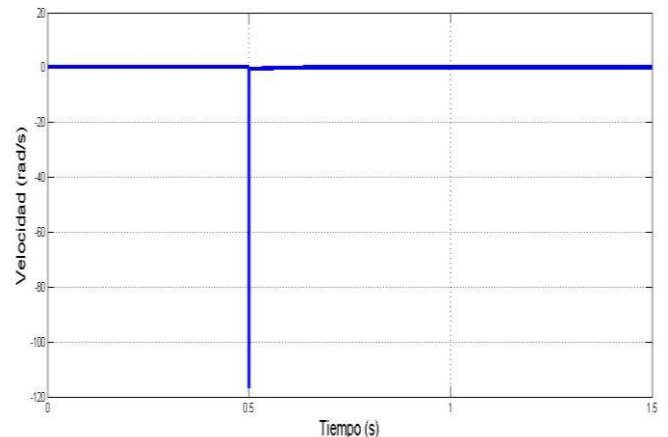


Fig. 5 Comportamiento de la dinámica del error 1

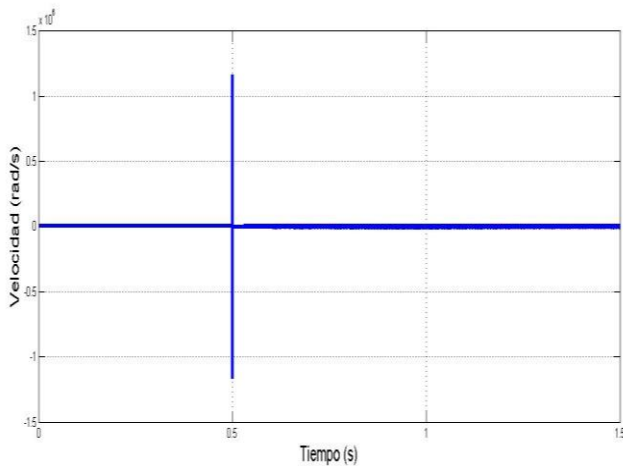


Fig. 6 Comportamiento de la dinámica del error 2

En la Fig. 7 se realiza una comparación de la dinámica que tiene el error 4 sin y con controlador, y como solo por el hecho de realizar este tipo de control aseguramos que este error tienda a cero en tiempo finito.

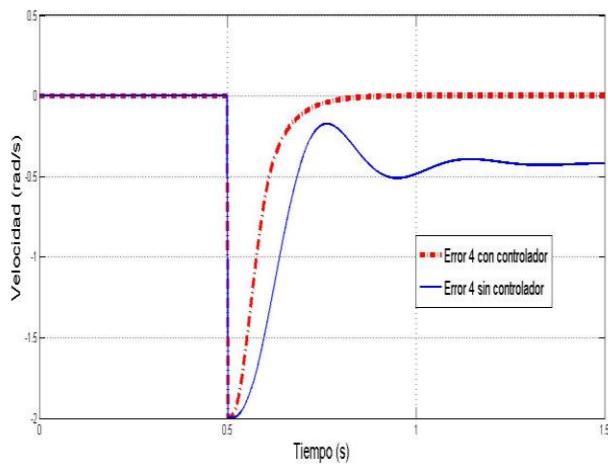


Fig. 7 Comportamiento y comparación de la dinámica del error 4

Para efectos de mejorar los resultados en cuanto al esfuerzo de control se plantea realizar un controlador PID, con el cual se logra minimizar los efectos adversos que se presentaban en la acción de control vistos anteriormente. Este efecto se muestra en la Fig. 8.

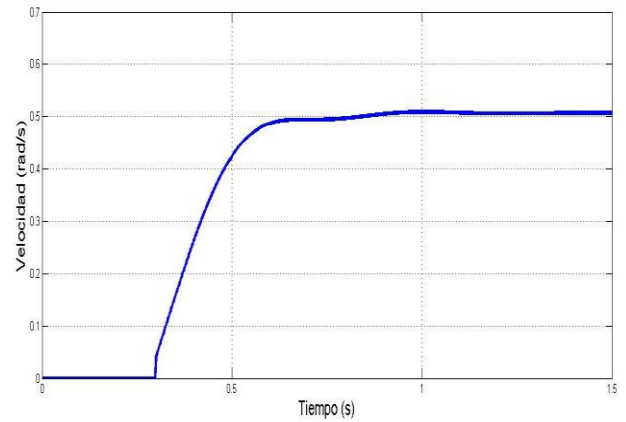


Fig. 8 Esfuerzo de control realizado con un controlador PID

Sin embargo, a pesar de reducir notablemente la acción de control, pierde mucho en cuanto al seguimiento de referencia, como se puede ver en la Fig. 9, ya que el controlador por modos deslizantes logra seguir dicha referencia mucho mejor.

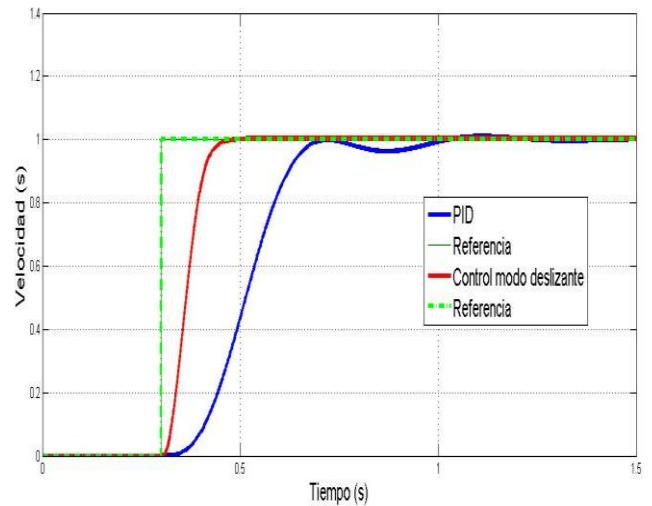


Fig. 9 Comparación del seguimiento de referencia realizado por los dos tipos de controladores

#### IV. CONCLUSIONES

Uno de los principales resultados obtenidos en el diseño de un controlador basado en observador para un sistema de torsión, es que la dinámica deseada para el modo deslizante puede alcanzarse con una adecuada selección o diseño de las ganancias respectivas en el modelo. Esto asegura que, en condiciones ideales, el sistema sea robusto, es decir, insensible a las perturbaciones externas e incluso a los errores cometidos durante el proceso de modelado.

Realizar un control por modos deslizantes para un sistema de torsión resulta muy eficaz a la hora de seguir una referencia o que el sistema responda rápida y eficazmente frente a cualquier cambio de referencia, incluso la robustez que implican estos tipos de controladores los hacen muy apetecidos, sin embargo, no solo se pueden sacar conclusiones acerca de su funcionamiento basados en esos factores, ya que la acción de control para este ejemplo se vio bastante afectada.

## V. AGRADECIMIENTOS

La pasantía del segundo autor en Colombia se realizó con el apoyo del proyecto de Movilidad Internacional de la Diáspora Científica de Alto Reconocimiento (2012-Colciencias) – Banco Mundial.

## VI. REFERENCIAS

- [1] Drakunov, S., and Utkin V. (1995) “Sliding mode observers. Tutorial” Proceedings of 34<sup>th</sup> conference on decision and control. New Orleans, LA. pp 3376-3378.
- [2] Davila, J., Fridman, L., and Levant, A. (2005) “Second-order sliding-mode observer for mechanical systems” IEEE Transactions on Automatic Control, vol 50, No 11, pp 1785-1789.
- [3] Barbot, J.P., Djemai, M., and T. Boukhobza, T. (2002) “Sliding mode observers” Chapter 4 in “Sliding mode control in engineering” Edited by W. Perruquetti and J. P. Barbot. Copyright 2002 by Marcel Dekker, Inc
- [4] U. Vadim “*Sliding mode control design, principals and applications to electric drives,*” IEEE TRANSACTIONS ON POWER ELECTRONICS, Vol. 40, No. 1, 1993
- [5] R.Martinez, J. Alvarez “*Control of Mechanical Systems with Dry Friction,*” COMPUTACION Y SISTEMAS, Vol 16, No. 1, 2012.