

# UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA PUEBLA

Estudios con Reconocimiento de Validez Oficial por Decreto  
Presidencial del 3 de abril de 1981



INTERNALIZACIÓN DEL SIGNIFICADO DE OBJETOS  
MATEMÁTICOS A TRAVÉS DE LA ACCIÓN CON MANIPULATIVOS  
VIRTUALES. UN ESTUDIO MICROGENÉTICO.

Director del Trabajo  
DR. DANIEL MOCENCAHUA MORA

TESIS

que para obtener el Grado de  
DOCTORADO INTERINSTITUCIONAL EN EDUCACIÓN

presenta

ALFONSO ÁLVAREZ GRAYEB

**Internalización del significado de objetos matemáticos a través de la acción con manipulativos virtuales. Un estudio microgenético.**

**TABLA DE CONTENIDOS**

<u>Resumen</u> .....	6
<b>I. <u>El problema de investigación</u></b> .....	<b>8</b>
I.1 Importancia cultural de las matemáticas.....	8
I.2 Importancia cultural del Cálculo.....	10
I.3 Dificultades en el aprendizaje del Cálculo.....	13
I.4 La clase de Cálculo: Descripción del campo problemático desde la experiencia propia.....	19
I.5 Enfoques desde donde se ha investigado la didáctica de las matemáticas.....	25
I.6 Investigación acerca de artefactos y teorías para mejorar el aprendizaje de las matemáticas.....	31
I.7 Investigación sobre el aprendizaje de matemáticas con la ayuda de computadoras.....	34
I.8 Intencionalidades que originan esta tesis.....	37
I.9 El tema general de investigación.....	39
I.10 Primera formulación de las preguntas de investigación.....	40
I.11 El objeto de estudio de la investigación.....	41
I.12 Justificación.....	48
I.13 Factibilidad.....	56
<b>II. <u>Marco teórico</u></b> .....	<b>58</b>
II.1 Introducción.....	58
<b>II.2 Fundamento teórico para explicar la actividad humana mediada por herramientas y signos: La <i>teoría histórico-cultural</i><sup>6</sup> iniciada por Lev Vygotsky</b>	<b>60</b>
II.2.1 Herramientas y signos.....	63
II.2.2 Funciones psicológicas elementales y superiores.....	66
II.2.3 Lo social y lo individual.....	67
II.2.4 El proceso de <i>internalización</i> según Vygotsky.....	71
II.2.5 Zona de desarrollo próximo.....	73
II.2.6 El uso funcional de un signo como mediador semiótico.....	74
II.2.7 Significado y sentido, significado personal y significado cultural.....	77
II.2.8 La mediación semiótica de las herramientas técnicas: artefactos e instrumentos.....	79
II.2.9 Diferencia entre Instrumentos e Instrumentos de mediación semiótica.....	82

II.2.10	Conceptos científicos y conceptos cotidianos.....	84
II.2.11	La teoría de formación de conceptos de Vygotsky aplicada a las Matemáticas.....	88
II.2.12	Las funciones mentales superiores como productos de actividad mediada..	89
II.2.13	Etapas pre-conceptuales de la formación de conceptos.....	90
II.2.14	El pseudo-concepto: puente entre lo individual y lo social.....	92
II.2.15	Estructura del proceso de mediación semiótica.....	93
II.2.16	Hetero y auto-regulación con signos.....	95
II.2.17	Generalización abstracta y especificación contextual.....	99
II.2.18	Dominios genéticos en el trabajo de Vygotsky.....	100
II.2.19	Aprendizaje y desarrollo en la teoría de Vygotsky.....	104
II.2.20	Vigencia de Vygotsky en el siglo XXI.....	109
II.2.21	Aplicación de las ideas de Vygotsky en sujetos adolescentes y adultos.....	110
<b>II.3</b>	<b>Énfasis en la actividad humana en la <i>teoría histórico-cultural</i>. La aportación de Leontiev.....</b>	<b>113</b>
II.3.1	Introducción.....	113
II.3.2	Elementos estructurales de la <i>teoría de la actividad</i> de Leontiev.....	116
II.3.3	Necesidad y significado de la actividad para la pedagogía. Argumentos de Ilyenkov sobre argumentos kantianos.....	121
II.3.4	Crítica, limitaciones y precisiones sobre el concepto de <i>actividad</i> .....	125
<b>II.4</b>	<b>Extensión del concepto de <i>internalización</i> y crítica a la postura metodológica de la <i>teoría histórico-cultural</i> de Vygotsky por parte de Piotr Galperin.....</b>	<b>131</b>
II.4.1	Componentes de la teoría de Galperin.....	135
II.4.2	El concepto de <i>internalización</i> en Galperin.....	136
II.4.3	El análisis del rol de la enseñanza en el desarrollo cognitivo en Galperin....	139
II.4.4	El método paso-a-paso de formación de acciones mentales.....	146
II.4.5	Limitaciones del método paso-a-paso de formación de acciones mentales...	153
<b>II.5</b>	<b>La interacción didáctica estudiante-profesor en el escenario de actividad.</b>	<b>154</b>
<b>II.6</b>	<b>La Derivada y sus objetos constituyentes como objeto de estudio.....</b>	<b>159</b>
II.6.1	Introducción.....	159
II.6.2	Teoría elemental de la Derivada y de los objetos que la introducen .....	160
II.6.3	Los objetos matemáticos que conforman al objeto Derivada.....	162
II.6.4	Aproximaciones a la Derivada desde varios marcos teóricos.....	163
<b>II.7</b>	<b>Fundamento teórico para caracterizar las prácticas culturales acerca de un objeto matemático: el enfoque onto-semiótico de la didáctica de las matemáticas.....</b>	<b>172</b>
II.7.1	Perspectiva pragmática del conocimiento matemático: significado institucional y personal de los objetos matemáticos.....	172

II.7.2 Componentes del significado.....	177
II.7.3 Funciones semióticas.....	178
<b>II.8 Fundamento teórico para caracterizar al instrumento.....</b>	<b>183</b>
II.8.1 Los manipulativos virtuales en el aprendizaje de matemáticas.....	183
II.8.2 La noción de lo concreto en relación a los manipulativos virtuales.....	186
II.8.3 Factores de interactividad de las representaciones matemáticas visuales que afectan el aprendizaje y el proceso cognitivo.....	191
II.8.4 Interacción e interactividad.....	192
<b><u>II.9 Síntesis teórica: argumentación sobre la relación entre los productos de la acción humana: ¿procesos psicológicos superiores, sistemas de signos, sistemas de prácticas, acciones mentales o funciones semióticas?.....</u></b>	<b>199</b>
<b><u>II.10 Consideraciones epistemológicas.....</u></b>	<b>207</b>
<b><u>II.11 Fundamentos teóricos hacia el diseño metodológico.....</u></b>	<b>212</b>
II.11.1 La unidad de análisis en la <i>teoría histórico-cultural</i> .....	212
II.11.2 Importancia de la <i>actividad</i> como unidad de análisis.....	215
II.11.3 Precisiones sobre el concepto de <i>escenario de actividad</i> .....	216
II.11.4 La investigación microgenética.....	222
II.11.5 Características del <i>método microgenético</i> .....	227
II.11.6 Dimensiones para observar el <i>proceso</i> de cambio.....	232
II.11.7 El rol dual del profesor-investigador.....	246
<b><u>II.12 Reformulación de las preguntas y formulación explícita del objetivo de investigación después de la revisión teórica.....</u></b>	<b>249</b>
<b><u>II.13 Supuestos o hipótesis de trabajo de la investigación.....</u></b>	<b>252</b>
<b><u>III. Metodología.....</u></b>	<b>253</b>
III.1 Estrategia de investigación.....	253
III.2 Componentes del significado <i>pretendido</i> de los objetos matemáticos involucrados en cada tarea.....	261
III.3 Criterios para el diseño de las tareas.....	268
III.4 Las tareas planteadas.....	271
III.5 Diseño de los manipulativos para promover el significado pretendido.....	277
III.6 El sujeto y el contexto físico.....	280
III.7 Instrumentos de recolección de datos.....	281
III.8 Cuestiones sobre la validez de esta investigación.....	283

<b><u>IV . Análisis de los datos</u></b> .....	<b>286</b>
IV.1 Estrategia del análisis.....	286
IV.2 Construcción de la base de datos y bitácora de decisiones tomadas sobre la marcha del análisis.....	292
IV.3 El análisis y los resultados de la Tarea 4.....	296
<b><u>V . Discusión</u></b> .....	<b>307</b>
V.1 Interpretación teórica de los datos.....	307
V.2 Recomendaciones para futuras investigaciones.....	315
V.3 Implicaciones teóricas y prácticas de esta investigación.....	317
V.4 La respuesta a las preguntas de investigación.....	319
V.5 Limitaciones de la investigación.....	320
<b><u>VI . Conclusiones</u></b> .....	<b>322</b>
VI.1 Sobre el proceso.....	322
VI.2 Sobre el producto.....	327
VI.3 Sobre los supuestos.....	330
<b><u>VII. Glosario</u></b> .....	<b>333</b>
<b><u>VIII . Referencias</u></b> .....	<b>337</b>
<b><u>IX . Anexos</u></b> .....	<b>360</b>
IX.1 Pretest general.....	360
IX.2 Respuesta de Erick al pretest general.....	363
IX.3 Transcripción integral de la interacción con Erick.....	364
IX.4 Postest 3 de Erick.....	384
IX.5 Análisis del postest 3 de Erick.....	385
IX.6 Análisis y resultados de las 7 tareas.....	387

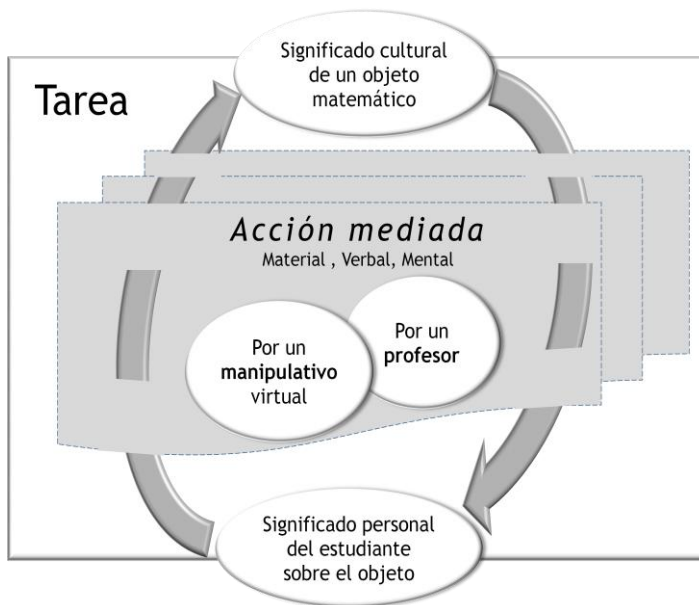
**Palabras clave:** *Acción. Actividad. Artefacto. Función semiótica. Instrumento. Instrumento de mediación semiótica. Internalización. Manipulativo virtual. Mediación semiótica. Microgénesis. Objeto matemático. Significado institucional. Significado personal.*

**Keywords:** *Action. Activity. Artefact. Instrument. Institutional meaning. Instrument of semiotic mediation. Internalization. Mathematical object. Microgenesis. Personal meaning. Semiotic function. Semiotic mediation. Virtual manipulative.*

## Resumen

Las problemáticas suscitadas a propósito del aprendizaje de las matemáticas han motivado la investigación desde muy diversas posturas teóricas, dimensiones y escalas. El advenimiento de las computadoras como recurso aplicado a los procesos de aprendizaje abre inmensas posibilidades para su mejoramiento, y a la vez, plantea la necesidad de hacer investigación para conocer los usos idóneos y los efectos reales sobre el aprendiz, y con esto tratar de superar el optimismo y la ingenuidad iniciales que rodearon su llegada. En esta tesis doctoral se investiga en particular el funcionamiento de un *escenario de actividad*

humana con computadoras (Figura 1) que consiste en la ejecución de tareas de acercamiento de un sujeto al significado cultural de objetos matemáticos<sup>1</sup>, y su gradual *internalización* a través de la mediación tanto del uso de *manipulativos virtuales*<sup>2</sup> diseñados específicamente para ese fin, como



**Figura 1.** Escenario de actividad y unidad de análisis de esta investigación

de la interacción simultánea con un

<sup>1</sup> **Objeto matemático** es todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas. Los tipos de objetos matemáticos son: conceptos, lenguajes de representación, operaciones, problemas, proposiciones y argumentos.

<sup>2</sup> **Manipulativo virtual** es una representación visual interactiva de un objeto dinámico que presenta una oportunidad para construir conocimiento matemático.

profesor. La actividad del escenario se registra con el software *Adobe Captivate* que posibilita la captura de las acciones materiales en pantalla y simultáneamente el discurso de los sujetos. El registro se complementa con pruebas escritas en las que el estudiante resuelve problemas de aplicación relativos a los objetos estudiados. Esto permite documentar tanto el *proceso* como el *producto* de la actividad a través del análisis de la transcripción del discurso y de las pruebas escritas en una base de datos.

Las preguntas de investigación se dirigen a describir y explicar cómo el proceso alcanza el producto de la actividad en el escenario o tarea, que es el *significado* de los *objetos matemáticos* tomado como el *sistema de prácticas culturales* a propósito de ellos. Para esto se analiza el discurso a través de una serie de *dimensiones del cambio* que permiten dar cuenta del proceso *microgenético* del sujeto, es decir, de los cambios y abstracciones que se generan en él a muy corto plazo, frente a nuestros ojos. Las *dimensiones del cambio* a observar son: el grado de abstracción, de generalización y de explicitación del discurso del sujeto, el grado de independencia de su acción, la abreviación final de sus operaciones, la auto-regulación, la flexibilidad en la solución de problemas, el entendimiento y la consciencia mostradas en el discurso oral y escrito.

El funcionamiento de este *escenario de actividad*, que es a la vez la unidad de análisis de la investigación, se estudia desde la *teoría histórico-cultural* de Lev Vygotsky y las extensiones a esta que hicieron A.N. Leontiev y P.Y. Galperin, complementada con algunas ideas provenientes del *enfoque onto-semiótico de la didáctica de matemáticas* de Díaz Godino, y del marco descriptivo para la interactividad humana con computadoras de Sedig y Hai-Ning.

[\(A la tabla de contenidos\)](#)

## I. El problema de investigación

### I.1 Importancia cultural de las matemáticas

El impulso humano por conocer el universo que habita, y la necesidad de conferirle un orden, es decir, la visión de un cosmos inteligible, podría señalarse como la génesis de las Matemáticas. Ya Pitágoras (582-507 AC) y sus discípulos atribuían al número el poder de develar la fuente y raíces de la naturaleza. Ese sería el primer atributo de las Matemáticas, ser una herramienta para comprender el mundo sensible y también el mundo conceptual asociado, generando con esto un modelo de pensamiento lógico que ha alimentado incluso a diversas teorías filosóficas. Existe también una dimensión estética de las Matemáticas (Guzmán, 1997), una belleza que Platón (427-347 AC) decía que podía verse *con los ojos del alma*, y que conectaba con la armonía universal y aún con la divinidad. Pero las Matemáticas sirven también a fines pragmáticos, como hacer modelos de la realidad para intentar explicarla con su lenguaje hiper-sintético. Esta capacidad de hacer modelos no está exenta de misterio, pues tenemos, como decía Einstein (1879-1955), una herramienta conceptual desligada de la experiencia que puede, sin embargo, servir para representarla.

Esta sorprendente característica ha convertido a las Matemáticas nada menos que en el lenguaje de las ciencias y de la tecnología. Otra característica igualmente sorprendente es que el nacimiento de importantes áreas del conocimiento matemático como la teoría de probabilidad o la topología, se dio a raíz de actividad lúdica: Del juego de cartas en el primer caso y de un divertido reto para hacer un recorrido a través de los siete puentes de la



ciudad de Königsberg (hoy Alemania) en el segundo, casos que ilustran el carácter lúdico a veces poco apreciado de las Matemáticas.

En suma, es innegable la influencia que las Matemáticas tienen y han tenido en la cultura y en el desarrollo cognitivo del hombre. Por eso se las pondera públicamente como insumo cultural deseable o necesario del hombre contemporáneo, tanto en ámbitos formalizados como no formalizados, pues esto se dice no sólo para los estudiantes o los profesionales sino también para el ciudadano común. Las instituciones educativas colocan al manejo matemático, junto con las habilidades de lectoescritura, como condiciones mínimas para enfrentar la experiencia escolar y de vida cotidiana.

Su aprendizaje no está exento de problemas. Muchos estudiantes se sienten intimidados, inseguros y temerosos al enfrentar el estudio de las Matemáticas, y a ciencia cierta nadie sabe porqué. Algunos psicólogos piensan que existe algo llamado *la ceguera de los símbolos*, o sea, la incapacidad para prescindir de lo concreto y para comprender el cambio controlado de los símbolos (Adler, 1982).

Existe controversia acerca de las posiciones pro y contra las Matemáticas ilustrada por importantes personajes (Kline, 1998). Por ejemplo, San Agustín, obispo de Hipona hacia el año 400, decía: *El buen cristiano debe estar alerta en contra de los matemáticos y todos quienes hacen profecías vacuas. Existe el peligro de que los matemáticos tengan pacto con el demonio y la misión de ofuscar el espíritu del hombre para confinarlo en los linderos del infierno*. Juristas romanos decretaron en el Código de matemáticos y hacedores del mal, que *se prohíbe aprender el arte de la geometría, arte tan condenable como las matemáticas, y así también tomar parte en ejercicios públicos*. Dice el ilustre Blas Pascal,

quien hizo aportaciones importantes a las Matemáticas: *Considero a las matemáticas el ejercicio supremo del espíritu; pero al mismo tiempo las sé tan inútiles, que hago poca distinción entre el hombre que sólo es matemático y el artesano común.* Y Arthur Schopenhauer consideraba que *la actividad más baja del espíritu era la aritmética, como lo demostraba el hecho de que hasta una máquina pudiera ejecutar sus operaciones.*

En contraparte, Platón consideró a las Matemáticas como medio de adiestrar la mente para la filosofía. En la Edad Media (476-1492) se enseñó Matemáticas como prólogo del razonamiento teológico, y el hombre educado del siglo XVIII sentía que debía estar al corriente de los temas matemáticos de vanguardia (Kline, 1998). Varias ciencias han tenido como lenguaje el matemático, y una multitud de problemas comerciales, industriales y científicos se han resuelto con la ayuda de tal herramienta conceptual, que incluso llegó a ser vista por algunos, como se ha dicho, como el trasfondo del orden del universo.

## **I.2 Importancia cultural del Cálculo**

La rama de las matemáticas llamada Cálculo es una de las realizaciones supremas del intelecto humano (Edwards y Penney, 1987). Muchos de los descubrimientos científicos que han marcado nuestra civilización en los últimos tres siglos hubieran sido imposibles sin el Cálculo, cuyo cuerpo de técnicas de computación continúa en servicio como el principal lenguaje cuantitativo de la ciencia y la tecnología.

Los orígenes del Cálculo se remontan a la Grecia antigua (Salas, Hille, Etgen, 2002), donde se plantearon muchas cuestiones, a menudo consideradas paradójicas, sobre las tangentes, el movimiento, el área, lo infinitamente pequeño, lo infinitamente grande, y que encontraron después respuesta con el Cálculo. En algunos casos los griegos dieron

respuestas, pero en general sólo formularon las preguntas. Después de los griegos el progreso fue lento. La comunicación era limitada y los estudiosos estaban casi obligados a partir de cero. A lo largo de los siglos se concibieron algunas respuestas ingeniosas para alguno de los problemas planteados, pero no se elaboraron soluciones generales. El progreso se vio obstaculizado también por la carencia de una notación conveniente. El álgebra, fundada en el siglo IX por los árabes, no fue plenamente sistematizada sino hasta el siglo XVI.

Para un romano de los días del Imperio, *calculus* era un pequeño guijarro utilizado para contar y para apostar. Unos siglos más tarde, *calcularre* vino a significar lo mismo que calcular, contar o resolver. Para los matemáticos, físicos e investigadores en ciencias sociales de nuestros días, el Cálculo está constituido por las matemáticas elementales (álgebra, geometría, trigonometría) potenciadas por el proceso de paso *al límite*. El Cálculo es la reformulación de las ideas de las matemáticas elementales previas al Cálculo (Larson, Hostetler y Edwards, 2006), y las extiende a una situación más general a través de un proceso de límite.

El invento del Cálculo, saber que puede considerarse como la matemática de los cambios, es atribuido a Sir Isaac Newton (1642-1727) y a Gottfried Leibniz (1646-1716). El invento de Newton es el resultado de la estancia forzada en su casa a causa del cierre temporal de la Universidad de Cambridge en 1655 por la peste bubónica, lapso que duró un año y medio y del que nacieron su método de las fluxiones y sus teorías de la gravitación y de la luz. El invento que nos interesa es el primero, del cual Newton escribió en 1672 pero que se publicó en 1736, nueve años después de su muerte. El nuevo método, que hoy llamamos Cálculo, fue anunciado por primera vez en 1687 en términos vagos, sin símbolos,

fórmulas ni aplicaciones. Newton fue reacio a publicar nada claro acerca de su descubrimiento y no es de sorprender que otros sabios europeos se adelantaran a él.

Leibniz inició su trabajo ocho años después que Newton. En 1675 estableció la notación moderna básica:  $dx$  y  $\int$ . Sus publicaciones causaron poco impacto en Alemania, pero los hermanos suizos Bernoulli recogieron sus ideas y las enriquecieron con otras muchas. A partir de 1690, el Cálculo creció rápidamente y alcanzó prácticamente su estado actual en unos cien años. Algunas sutilezas teóricas no fueron plenamente resueltas hasta el siglo XX (Salas, Hille y Etgen, 2002).

En el siglo XVII, crítico para el Cálculo, los matemáticos buscaban respuestas y herramientas para enfrentar a problemas relativos al movimiento de los cuerpos en la superficie de la Tierra o cerca de ella, lo que involucraba la determinación de su velocidad y aceleración. El estudio del movimiento es relativamente sencillo, visto desde la herramienta matemática a utilizar, si la velocidad con que se mueve el cuerpo es constante. Pero si esta es variable, se hace necesario determinar la velocidad en un instante determinado, y para eso no bastaban las herramientas disponibles (álgebra, geometría, trigonometría). Otro problema tenía que ver con la dirección con que se mueve el cuerpo a lo largo de su trayectoria, dirección que cambia a cada instante, y que de conocerla serviría para modelar la totalidad del fenómeno del movimiento. El tercer gran problema era el de determinar el valor máximo o el mínimo de una *función* (una cantidad que depende del valor de otra), por ejemplo aquella que determina la distancia máxima o mínima de la Tierra al Sol o a algún planeta. El cuarto gran problema consistía en medir áreas y volúmenes de figuras o cuerpos irregulares, como el de la Tierra misma, que es un esferoide con los polos achatados y no una esfera perfecta. O bien el problema de calcular

la trayectoria de un planeta cuya órbita es elíptica, que serviría para predecir la posición del planeta en cualquier momento. Lo que ya se sabía en el siglo XVII era que estos problemas tenían que ver con un concepto básico: La rapidez instantánea de cambio de una variable respecto a otra, asunto que está en la base de la comprensión del Cálculo, y que sigue siendo una noción escurridiza que dificulta la aproximación de los estudiantes antiguos y modernos. Al acercamiento a nociones como esta dedicará sus esfuerzos la presente investigación.

### **I.3 Dificultades en el aprendizaje del Cálculo**

Las formas de aproximación al estudio de las matemáticas escolares han sido criticadas por numerosos expertos y desde diversos puntos de vista, como respuesta a las dificultades y resultados de aprendizaje constatados en los estudiantes. Alan Schoenfeld (1992) dice que la educación tradicional de las matemáticas está enfocada en los contenidos, a los que se divide en trozos de conocimiento que los estudiantes deben *dominar*. Aprender matemáticas es demostrar un dominio sobre algunos hechos y unos procedimientos aislados cuya suma constituye el *saber matemático*, confeccionado por expertos y memorizado por los estudiantes.

Coinciden en este punto Bosch y Gascón (1997), cuando ven la atomización del conocimiento en los propios textos y en las actividades, en los que los esfuerzos se concentran en estudiar técnicas algorítmicas simples, y no problemas auténticos. Se enfatizan los temas pero no sus contextos, y esto es una importante causa de dificultades al aprender a resolver problemas. Estos autores señalan también una desconexión entre las áreas de las matemáticas (álgebra, geometría, geometría analítica, trigonometría, cálculo),

siendo que la solución de un problema complejo, como el cálculo del volumen de un sólido de revolución, puede requerir la articulación de técnicas de varias de esas áreas. Se plantean también la pregunta acerca de cómo diseñar experiencias de aprendizaje que provoquen la articulación de las cuestiones puntuales dentro de cada tema, los temas dentro de cada área y las distintas áreas de las matemáticas entre sí, desde el trabajo rutinario hasta la solución de problemas complejos. Es necesario, señalan, articular también los niveles escolares mismos, retomando y ampliando los aprendizajes de la primaria en la secundaria, y de ésta con el bachillerato y este con la universidad, cosa contraria a la situación de segmentación que encontramos en la práctica actual. La respuesta que proponen es el análisis del fenómeno didáctico como una *praxeología local* (Bosch y Gascón, 1997) que contemple en forma sistémica las articulaciones entre niveles escolares así como la actividad de todos los actores y la presencia de los recursos didácticos. En el mismo artículo aparece la crítica de Mogens Niss acerca de que no hay una transferencia automática desde la teoría matemática hacia la habilidad para resolver problemas no-rutinarios y hacer la modelización de problemas extra-matemáticos, tomadas estas dos actividades como un objetivo principal de la actividad matemática. Para que esto suceda es necesaria una enseñanza-aprendizaje explícita.

Abundando en el tema de las dificultades, puede decirse con justicia que la conceptualización de los objetos del Cálculo no es sencilla. El estudiante novicio tiene que enfrentar dificultades epistemológicas como la de tener que construir una noción de *lo continuo* como contrapuesto a *lo discreto*, y de lo dinámico frente a lo estático (Butto, Delgado, Zamora, 2003); con nociones abstractas, como las de *infinito* o *infinitamente pequeño* (problema estudiado por Magnani y Dossena, 2005), o como la noción de *razón de*

*cambio* media e instantánea estudiada por Hauger (1997) y también por Bezuidenhout (1998), Hauger (2000), Naidoo y Naidoo (2007), Estrada-Medina y Arenas-Sánchez (2006); o dificultades con los diferentes lenguajes de representación presentes en la actividad matemática (estudiadas entre otros por Braz Dias, 1999). Ante estos problemas de conceptualización, debidos a la naturaleza abstracta de los objetos matemáticos, resulta indispensable el recurso semiótico, las representaciones ostensivas que presentan las ventajas de la obviedad, y en los que a menudo se requiere de *inferencias figurales* (Richard, 2004) que se hacen a partir de una semiótica institucional a la cual se intenta aproximar al estudiante a través de los procesos de enseñanza-aprendizaje. La consideración de una semiótica personal puede conllevar riesgos en el caso contrario en que un profesor debe por ejemplo evaluar las producciones gráficas que acompañan un razonamiento matemático de sus alumnos.

Uno de los problemas de aprendizaje más notorios y comunes entre estudiantes universitarios y pre-universitarios que se enfrentan al estudio de las matemáticas, es el problema de la fragmentación de los saberes que han ido acumulando en su experiencia escolar, problema que puede explicarse en parte cuando se analiza, así sea superficialmente, la docencia tradicional de matemáticas. Resaltan dos aspectos negativos en gran parte de los programas de estudio: La falta de contexto de los contenidos matemáticos, y el marcado énfasis en el aspecto algorítmico, en detrimento o ante la inexistencia de otras dimensiones presentes en la actividad matemática de tipo global como la solución de problemas aplicados. Una de las consecuencias de esta situación es la carencia de sentido de la actividad matemática, desligada de la vida cotidiana del estudiante y a menudo lejos de sus intereses. Dicha fragmentación está presente no sólo entre un contenido y otro, sino aún

dentro de un mismo tema o unidad de estudio. Este último caso, llamado *compartimentalización*, es la dificultad para cambiar en forma flexible entre diferentes registros de representación semiótica alrededor de un mismo concepto matemático. Este asunto, estudiado por Gagatsis et al. (2006), toma relevancia porque la *compartimentalización* revela o es sintomática de una falta de comprensión profunda del significado del concepto, y redundante en limitar la capacidad de resolver problemas en los que este se aplica. Ya Raymond Duval (2000) había esclarecido que los conceptos matemáticos son sólo accesibles a través justamente de sus representaciones semióticas, como las gráficas, las fórmulas algebraicas, el lenguaje natural o los símbolos, al grado de que para algunos conceptos, es muy difícil alcanzar su comprensión sin tener el dominio de esas representaciones.

La representación semiótica juega un papel importante incluso en escenarios distintos al escolar donde se requiere un aprendizaje específico, como en ciertos procesos laborales estudiados por Bakker, Hoyles, Kent y Noss (2006) en su investigación con herramientas semióticas (tablas, gráficos) con las que empleados de empresas pueden elaborar y visualizar información con el fin de hacer visible lo invisible, es decir, crear y manipular signos para entender procesos y para tomar decisiones de importancia, como la optimización de algún proceso en su lugar de trabajo.

Pero a menudo no basta la *representación* del concepto, que es la más elemental de las funciones cognitivas originadas en la actividad matemática (Duval, 2006), sino que es necesario poder hacer por un lado un *tratamiento* del objeto dentro de un mismo registro (digamos entre distintas formas algebraicas), y aún lograr la *conversión* entre los diferentes registros, función considerada por Duval como fundamental en la adquisición de un



concepto. En las escuelas mexicanas es común que en los contenidos matemáticos se conceda un mayor peso a la acción algebraica en detrimento de la conversión entre formas de representación de los objetos matemáticos, misma que está en la base de la capacidad de resolución de problemas aplicados. La investigación de Gagatsis et al. (2006) demostró que el uso de software matemático, con capacidades gráficas y simbólicas, ayuda a disminuir significativamente el fenómeno de la *compartamentalización*.

Desde otra mirada, Merenluoto y Lehtinen (2000) señalan que muchas de las dificultades de aprendizaje de matemáticas en estudiantes se deben a hechos como los siguientes: 1. Los conceptos matemáticos tienen una naturaleza doble: *operacional* y *estructural*, siendo la primera la que precede cronológicamente a la segunda, y entre las cuales hay una gran brecha ontológica. 2. Existe un gran periodo de tiempo entre el desarrollo de la fase operacional y la lenta y penosa formalización estructural. 3. El grado de abstracción de los conceptos de las matemáticas superiores contrastan con la baja abstracción de las matemáticas usadas en la vida cotidiana de los estudiantes. 4. Cada avance en un concepto requiere de nuevos conocimientos pero también de conflictos con conocimientos previos.

Cada uno de estos factores puede obstaculizar una aproximación tersa a los objetos matemáticos. Estos autores nos recuerdan que si bien se supone que las matemáticas son un sistema jerárquico en el que un nuevo concepto se construye en forma lógica de conceptos previos, hay casos donde esta lógica se invierte, como es el caso del propio concepto de número, usado desde la antigüedad pero formalizado hasta el siglo XIX. Esta formalización va en sentido contrario a la forma en que se enseña en el currículum ordinario, que comienza con la formalización. Es posible que las matemáticas consideradas como un todo

armonioso sean vistas así sólo por los expertos en matemáticas, pero para el que aprende matemáticas pueden verse como algo fragmentado y discontinuo. Las categorías ontológicas de las unidades de conocimiento matemático, son unas para los aprendices y otras para los expertos.

Otras categorías de dificultades en estudiantes de Cálculo, son mencionadas por Braz Dias (1999) y corroboradas por muchos profesores de Cálculo, a saber: 1. Problemas de interpretación del lenguaje algebraico presente en los textos convencionales, como en la proposición *Sea  $F: A \rightarrow B, x \in A, y \in B$ , que es la simbolización matemática de la frase que se esperaría que el estudiante tradujera por algo parecido a *sea la función  $F$  que va del conjunto  $A$  al conjunto  $B$ , donde  $x$  pertenece al conjunto llamado dominio  $A$  y  $y$  pertenece al conjunto llamado rango  $B$ .* 2. Dificultades de interpretación de gráficas, donde es fácil observar que muchos estudiantes no pueden ver la gráfica como en un continuo sino que la piensan en términos de puntos discretos, o bien como puntos discretos en lugar de intervalos. 3. Problemas de interpretación de significado, por ejemplo en problemas donde una cantidad está expresada por una función, algunos estudiantes no entienden cómo una ecuación puede dar un valor particular de dicha cantidad. Esto revela problemas de conexión entre la modelación matemática y la algoritmia. Un matiz adicional de los problemas de significado, está con el uso de palabras que tienen un sentido en el lenguaje natural y otro en el matemático.*

Otra dificultad tiene que ver con la comprensión de una de las nociones de base para el aprendizaje del Cálculo Diferencial, la noción de *razón de cambio*. Hace ya más de diez años la investigación de Hauger (1997) había demostrado la existencia de este problema y propuesto soluciones. En dicha investigación, que estudió el caso de cuatro estudiantes a

quienes se pidió trazar una gráfica *distancia-tiempo* que mostrara una zona de disminución y otra de aumento de velocidad, y al haber encontrado en todos los casos la misma gráfica errónea, se propuso trabajar con ellos a partir de la noción ya construida de tangente de una recta y la del cambio en intervalos para construir la noción de razón de cambio con éxito.

Pero por otro lado, también estas dificultades pueden utilizarse positivamente.

Giraldo, Carvalho y Tall (2003) estudiaron conflictos o discrepancias entre los resultados o representaciones ofrecidos por la computadora contra los resultados que arroja la teoría a propósito del tema *límites*, y los aprovecharon como una oportunidad para enriquecerlo con aspectos sutiles pero importantes tanto del objeto *límite*, noción indispensable en el acercamiento al Cálculo, como del objeto *Derivada*.

La incapacidad que muestran muchos egresados de universidades para integrar lo que saben con sus posibles aplicaciones en cualquier tipo de contenidos, y en particular en las matemáticas, ha sido estudiada por muchos teóricos e investigadores. Una discusión sobre causas filosóficas y psicológicas de esta dificultad o imposibilidad, debida a Ilyenkov (2004) con argumentos e ideas de Emmanuel Kant, se presenta en el *marco teórico* de esta tesis. Ilyenkov fue un importante filósofo soviético de los años 60 que reeditó el debate de la década de 1920 entre los “mecanicistas” y los “dialécticos”, discusión cercana a los fines y al marco teórico de esta tesis.

#### **I.4 La clase de Cálculo: Descripción del campo problemático desde la experiencia propia**

La clase de matemáticas es un fenómeno complejo donde interactúan múltiples variables y que se podría modelizar en forma gruesa por un proceso estocástico

multivariado (Godino, Contreras y Font, 2006) que intenta describir la influencia de estas variables en el aula real. Existen factores de tipo epistémico, cognitivo, de interacción docente-discente, relacionados con los medios, y factores afectivos, interactuando en forma sistémica. Se hará una descripción libre de la experiencia del investigador en el aula, teniendo como guía a los factores mencionados.

El proceso epistémico tiene que ver con la lógica y la secuencia de acceso al conocimiento, históricamente desarrollado e institucionalizado, con las que se presenta a los estudiantes los contenidos matemáticos. También como la distribución en el tiempo de la enseñanza de los problemas matemáticos, de sus formas de representación, de las operaciones y los argumentos alrededor de tales problemas. La tradición epistémica en matemáticas escolares ha sido que la lógica de acercamiento a los saberes matemáticos no es otra que la de la propia disciplina, esto es, un camino eminentemente deductivo que va de las definiciones generales a los ejemplos (internos) del concepto y a los ejemplos (externos) de aplicación. Siendo las matemáticas una construcción axiomática y abstracta, sería difícil negar la importancia de este *orden* por muy artificial que pudiera resultar si tomamos en cuenta que en muchos casos los descubrimientos matemáticos se dieron moviéndose en sentido contrario, desde un problema práctico a resolver hasta su abstracción y generalización.

Esta lógica disciplinaria se refleja en programas de estudio lineales, que consisten en un listado de temas abstractos descontextualizados, aunque lógicamente encadenados, copiados de libros de texto. La lectura del programa, previa a su estudio propiamente dicho, deja a un estudiante en el mismo lugar que antes de haberlo leído. Pareciera que el currículum tradicional de matemáticas crea un vacío entre esta ciencia y la vida cotidiana,

lo que puede provocar una actitud negativa o al menos recelosa o desinteresada de parte del estudiante medio.

La mayor parte de los profesores encargados de acercar las matemáticas a los estudiantes, han heredado esta lógica lineal-descontextualizada-deductiva en la que fueron formados y, por falta de otra mejor, se dedican con toda honestidad a transmitir los contenidos de los textos a la mente de los estudiantes. Por mucho que estos contenidos estén impregnados con la experiencia, emociones y valores del profesor, lo común en nuestras aulas son los esquemas docentes de transmisión magistral del contenido del texto, centrados más en la enseñanza (el maestro, el rigor, la ciencia) que en el aprendizaje (el alumno, su circunstancia, su sistema de significados). Según lo observado en la experiencia propia, la estrategia docente es a menudo la empleada en los textos, y las interacciones profesor-alumno y alumno-alumno son generalmente reducidas a un patrón mínimo, de tal forma que el profesor no puede detectar la disparidad de significados docente-discente, o institucional-personal, y por ende no sabe si sus alumnos *lo están siguiendo* en el devenir de la clase.

Ante un esquema de transmisión unilateral, los estudiantes responden con memorización, con apatía y a veces con un abierto rechazo hacia una actividad –como en este caso la matemática- que no alcanza a tener un sentido claro para ellos. A esto se suma que el tipo de liderazgo que predomina en las aulas es de tipo autocrático ejercido por el profesor, quien detenta el poder de evaluar al estudiante y decidir su aprobación o reprobación en el curso, lo que implica también el ejercicio de un cierto grado de coacción.

En cuanto a los medios tradicionales que se emplean en México en el proceso de enseñanza-aprendizaje de matemáticas, los más comunes son el pizarrón, los textos, las calculadoras, graficadoras y de manera tibia pero creciente, la computadora (aprendiendo *en* y a veces *con* ella). Estos medios -y otros apoyos, tales como manipulativos virtuales o computarizados, y programas matemáticos especializados- pueden ser muy efectivos o inútiles dependiendo del proceso epistémico, es decir, de la forma y secuencia de presentar los contenidos (digamos por ejemplo en forma de casos, procesos o problemas y no de temas abstractos). El acceso a las computadoras permitiría ejecutar, en el aula o en el laboratorio, tareas interesantes como manipular objetos virtuales o simuladores, con el fin de construir o aclarar conceptos matemáticos abstractos e incluso problemas aplicados, aunque para esto se hace necesario un cuidadoso diseño instruccional que aproveche la capacidad potencial de la tecnología como socio cognitivo, asunto en el que no existe aún una total claridad teórica ni una cultura ya conformada. Las manipulativos, que serían una forma interesante de emplear la tecnología como apoyo cognitivo, pueden incluso acelerar el tiempo invertido en el aprendizaje de objetos matemáticos complejos, aunque su uso generalmente no es sistematizado ni compartido por los profesores. Por otro lado, es frecuente que el nivel de dominio de las computadoras por el profesor está por debajo del de sus alumnos, lo que inhibe su aplicación en la clase.

En cuanto a los textos de Cálculo como recurso didáctico, algunos autores de textos recientes se imponen a sí mismos un requisito que llaman la *regla de tres* o de *regla de cuatro*, que consiste en presentar los contenidos en las formas verbal, numérica, gráfica y simbólica, haciendo eco de la necesidad de utilizar diferentes lenguajes de representación de las matemáticas para facilitar su aprendizaje. El índice de estos textos se convierte con

frecuencia en el *programa de Cálculo* en las escuelas, sin una postura crítica que se cuestione si esa secuenciación de los contenidos es la idónea para los estudiantes de cualquier contexto. Por otro lado, se percibe una tendencia de los estudiantes universitarios a rechazar el libro, quizá por su precio, o por la dificultad de su lectura, o por la influencia creciente de una cultura visual o multimedia que el libro no tiene, aunque por otro lado los textos de Cálculo incluyen en forma creciente referencias a graficadoras o computadoras, y manejan problemas para explorar o experimentar con conceptos abstractos a través de la tecnología. También es creciente el número de apoyos en Internet que tiene un texto, factor que se ha convertido en el criterio de competencia entre las editoriales para ganar clientes.

Por el lado del estudiante, el proceso cognitivo visto como la manera y la secuencia cronológica en la que se van formando los significados matemáticos y sus relaciones en la mente de los estudiantes, es algo difícil de evaluar, y lo que se hace en lo general es que el profesor debe inferirlo a partir de pruebas escritas.

Por otro lado, se espera que esta formación de significados personales deba suceder idealmente en un horizonte cognitivo cercano y alcanzable por él (aunque sea) con ayuda externa, lo que no siempre sucede pues no todos los profesores de matemáticas acostumbran aplicar diagnósticos de los requisitos cognitivos de sus alumnos, y abordan el programa con un enfoque *para todos* partiendo desde *el principio*. Los resultados de las evaluaciones del aprendizaje en muchos estudiantes muestran que no hay un anclaje significativo de los nuevos contenidos, y empieza ahí un penoso proceso en el que algunos estudiantes naufragan o en el que tienen que hacerse de estos requisitos contra el tiempo y sin encontrar un sentido personal.

Según los enfoques didácticos de raíz antropológica como los de Chevallard y Brousseau, podríamos  *echar un vistazo*  a la estructura cognitiva del aprendiz para comprobar el significado de los contenidos, siempre que este significado se traduzca como el sistema de prácticas del sujeto ante una situación-problema, es decir, todo lo que dice y hace, opera y discurre a propósito de la misma.

Los datos duros del resultado de la enseñanza tradicional de matemáticas en Puebla y en muchos otros lugares, hablan de altos porcentajes de reprobación y de casos de deserción entre el primer y tercer semestre universitario (donde se ubican las ciencias básicas). El nivel matemático de los alumnos de primer ingreso a la universidad es más bien bajo (diagnósticos de matemáticas aplicados en la Universidad Iberoamericana Puebla y en la UPAEP), y esto es la secuela de enfoques didácticos centrados primordialmente en la algoritmia (las operaciones matemáticas y nada más, en el mejor de los casos) sin indicios del dominio de otros componentes epistémicos, tales como estrategias explícitas de solución de problemas, manejo y traducción entre lenguajes alternativos de representación, conceptos sólidamente formados, proposiciones, argumentos, y sin consideraciones suficientes al contexto de donde provienen los problemas (no hay un aprendizaje suficientemente situado). Los profesores observamos en las pruebas escritas que los procesos de solución de problemas son mecanizados aunque sean muy complejos, sin haber propiamente una interpretación del significado o una verdadera conceptualización de las nociones. Se detecta una competencia instrumental (dominio de la herramienta matemática) pero no relacional (el sistema de significados). Además, con frecuencia no se alcanza la evolución desde las concepciones pre-científicas que tiene un estudiante hasta los conceptos formales al término de la instrucción. Esta mecanización de procesos no está



anclada significativamente en la mente del estudiante, y por ende la información presente se pierde u olvida en poco tiempo, como se comprueba en los diagnósticos aplicados al principio de un curso para evaluar los contenidos del curso anterior.

Esta realidad genera frustración en estudiantes y profesores y hasta problemas de baja autoestima en los primeros, aunque por otro lado cada vez hay más personas queriendo revertir esta situación.

Por último, el proceso afectivo del estudiante que aprende matemáticas no es tomado generalmente en cuenta de manera intencional por los profesores, pues intuyen que no están preparados para lidiar con algo que saben que existe, pero que más vale que no aflore porque no saben qué hacer con él. Existen profesores que manejan bien la motivación extrínseca (relacionada con los materiales y las maneras interesantes de abordar los contenidos) e intrínseca (estimulando la autoestima del alumno y las formas efectivas de comunicación maestro-alumno, alumno-alumno), cuestiones que ayudan a desarrollar actitudes positivas en el estudiante, aunque quizá el profesor hace esto de manera menos intencional que intuitiva. Lo que podemos decir es que el valor o importancia que pueden tener las matemáticas para los estudiantes, se ve influido por el valor que tienen para el profesor, y esto no puede enseñarse, aunque misteriosamente se trasmite.

### **I.5 Enfoques desde donde se ha investigado la didáctica de las matemáticas**

Como se ha visto, el aprendizaje del Cálculo como de las matemáticas en general, es pródigo en cuestiones problemáticas, y por tanto el estudio de este fenómeno abre amplias posibilidades de investigación. En los esfuerzos recientes realizados en torno al estudio sistemático de la didáctica de matemáticas, pueden rastrearse algunos enfoques (Font,

2002), cada uno enfatizando alguna dimensión del fenómeno que estudian. Mientras algunos se centran en el sujeto y sus variables, como es el caso de la investigación apoyada en la psicología, otros enfatizan la dimensión social, la antropológica o la semiótica. Haremos pues un recuento tanto de estos enfoques de investigación como de las variantes más visibles de cada una, con el propósito de ubicar y matizar el enfoque didáctico que se adoptará en esta tesis.

La investigación en didáctica de matemáticas con el enfoque *cognitivo*, se caracteriza por su interés centrado en el sujeto, por lo que sus variables son el aprendizaje significativo, las representaciones mentales, los roles, la motivación, las creencias y valores tanto de alumnos como de profesores, sin tomar principalmente en cuenta otros factores externos al sujeto, como los de carácter social y otros. El concepto de aprendizaje tiene que ver con la integración significativa de nuevos conocimientos a la estructura cognitiva ya existente, y en analogías con el procesamiento de información ligada a la memoria que hacen las computadoras. Un concepto central en este enfoque es el de *esquema*, que es retomado desde varias posiciones teóricas. Una de ellas es la de Tall y Vinner en su *teoría concept-definition, concept-image*, que coloca a un concepto dado en dos celdas en la mente del sujeto, una de tipo institucional y otra formada de imágenes personales (Tall y Vinner, 1981). La noción de esquema está también presente en otra teoría cognitiva, la teoría *APOE*, de Dubinsky (Dubinsky y McDonall, 2001; Trigueros, 2005) que distingue las etapas de *Acción-Proceso-Objeto-Esquema* en la construcción de un concepto matemático. Dubinsky trata de adaptar las ideas de Piaget al pensamiento matemático avanzado, pero se enfrenta al problema de que Piaget lograba dicho pensamiento en sus sujetos haciéndoles manipular objetos físicos, mientras que a medida que los conceptos son

más abstractos, los objetos físicos deben sustituirse por objetos virtuales, labor en la que la computadora podría constituirse en un recurso importante.

Otra postura cognitiva en la investigación de didáctica de matemáticas es la teoría de los *campos conceptuales*, de Vergnaud. Un *campo conceptual* (Vergnaud, 1990) es un conjunto de problemas para los que se requiere un conjunto de conceptos, procedimientos y representaciones estrechamente interconectados para tratarlos. También en este enfoque es importante la noción de *esquema*, que aquí es visto como una totalidad organizada invariante que permite tener una conducta determinada ante una situación particular, y es en él donde se puede investigar los conocimientos *en-acto* de un sujeto. Para Vergnaud los *esquemas* están en la base de la competencia matemática.

La noción de *esquema*, con sus variantes según las diferentes teorías, se relaciona con el objeto de estudio de esta investigación, interesado en una aproximación global o sistémica a los objetos matemáticos que introducen a la Derivada, es decir, en un *esquema* o en la integración de varios de ellos alrededor de esos objetos matemáticos.

Las teorías cognitivas, por otro lado, no problematizan ni la naturaleza de los objetos matemáticos ni la epistemología del realismo científico.

Por su lado, el objeto de investigación desde el enfoque *constructivista radical* son las construcciones de los sujetos, estudiadas con metodologías cualitativas o interpretativas (Font, 2002). El mundo no es cognoscible en absoluto, y conocer algo es actuar sobre ese algo. Hay que limitarse a observar los modelos del mundo que las personas construyen, la organización de su mundo de experiencias. El significado de un objeto de aprendizaje es de tipo pragmatista, y la experiencia didáctica es muy respetuosa de la actividad reflexiva y de

las construcciones de los estudiantes, y el papel del profesor consiste sólo en facilitar ese proceso. Autores de corte constructivista como Glasersfeld, Confrey y Kieren han podido superar el aprendizaje pasivo en matemáticas y han aportado materiales, problemas contextualizados, trabajo colaborativo y el manejo de diferentes representaciones de los objetos estudiados.

Epistemológicamente, la investigación en el enfoque del *constructivismo social* se basa en la intersubjetividad histórica previa que ordena y da significado al mundo físico y social del sujeto (Ernest, 1994). La objetividad es esta intersubjetividad. Las matemáticas son una actividad de conversación, de lenguaje, dentro de la interacción humana. Confluye en este enfoque un componente antropológico en el que las matemáticas son vistas como una tecnología simbólica propia de una cultura, portadora de valores como racionalismo, objetivismo y control. Los trabajos de investigación se enfocan en situaciones de aprendizaje de matemáticas en condiciones de conflicto cultural, por ejemplo en el de minorías enclavadas en otra cultura dominante. Otra rama en el constructivismo social es el aporte de Vygotsky (1978, 2001), para quien todas las funciones superiores de la mente provienen de la inter-subjetividad y evolucionan a la intra-subjetividad. El lenguaje es visto como herramienta de mediación entre el mundo interno y el social, y juega un papel análogo a las herramientas en el mundo del trabajo, que condicionan la solución de problemas complejos. Las matemáticas son una construcción social mediada por instituciones que modelan la construcción individual. El conocimiento objetivo es el que es aceptado socialmente. Las investigaciones basadas en las ideas de Vygotsky generalmente se centran en el efecto del contexto y de la interacción social en la construcción de

aprendizajes y valores del sujeto, y su metodología predominante es de tipo interpretativo y de investigación-acción.

Un lugar prominente en el enfoque constructivista social lo ocupa el trabajo del *Cognition and Tecnology Group at Vanderbilt*, dirigido por John Bransford, que en la década entre 1980 y 90 combinaron escenarios basados en objetivos y el aprendizaje basado en problemas, y cuyos principios están relacionados con el aprendizaje situado y la teoría de la flexibilidad cognitiva.

Los enfoques didácticos *cognitivo* y *constructivista* se basan en las representaciones mentales de los sujetos como punto de partida, poniendo a la didáctica de las matemáticas como dependiente de otras ciencias como la psicología. A mediados de los años 80, surgieron en Francia dos posturas teóricas que quieren instalar a la didáctica de matemáticas como una ciencia aparte, que dé cuenta de los fenómenos particulares de esa actividad desde un escenario *sistémico*. Guy Brousseau problematiza el contenido matemático a enseñar en sí mismo, con el ánimo de fundar una disciplina científica específica. Antes de estudiar los problemas de aprendizaje de los alumnos, es necesario aclarar la organización matemática del contenido a enseñar (Brousseau, 1997). La unidad de análisis es el sistema didáctico formado por la triada integrada *conocimiento-estudiantes-profesor*, y analiza los problemas de la transposición didáctica del *saber-sabio* al *saber-a-enseñar*, a través de elementos como las situaciones didácticas y a-didácticas cuyo funcionamiento se consigna y maneja con una especie de contrato didáctico que define y delimita las funciones de estudiantes y profesor.

En el enfoque *antropológico* (Chevallard, 2003), la actividad matemática rebasa la mera construcción de sistemas de conceptos o procesos cognitivos, y la considera entonces una actividad humana en la que cosas, personas, ideas, instituciones y todo lo que pueda pensarse, son objetos. Esto incluye a los objetos matemáticos, susceptibles de que se pueda pensar en ellos y de tener así existencia. Se requiere entonces de un modelo epistemológico de lo que es hacer matemáticas; de ahí surge la entidad de *organización matemática*, con una anatomía y una fisiología propias. La primera está formada por tipos de problemas, por técnicas que los resuelven, tecnologías o discursos que describen esas técnicas, y una teoría que fundamenta todo esto. Hacer matemáticas consiste en activar y reconstruir una *organización matemática* con todos los elementos que implica. La visión positivista está aquí muy presente, al considerar que hay leyes que cumple necesariamente la *organización matemática*, en la que no se toma en cuenta la interpretación de significados de los actores. Su idea de significado de los objetos matemáticos tiene un fuerte contenido pragmático.

El enfoque antropológico abrió perspectivas amplias al considerar las dimensiones epistemológicas, psicológicas, lingüísticas y sociológicas en la didáctica de matemáticas, considerando tanto a los individuos como a las instituciones. Como en matemáticas son indispensables las representaciones ostensivas, la inclusión de la semiótica en esta lista de ciencias queda justificada. En esta línea incluyente se sitúa la *teoría de las funciones semióticas* (Godino, 2003. Godino, Batanero y Font, 2006), que incorpora y distingue los significados personales e institucionales como sistemas de prácticas emergentes de la actividad matemática. Establece asimismo explícitamente los componentes del significado como lo son los lenguajes de representación, las situaciones-problema, los conceptos y

definiciones, las proposiciones entre estos, los argumentos de validación y las operaciones y acciones a propósito de solucionar un problema intra o extra-matemático.

Por último, el enfoque *crítico* (Valero, 2007) incorpora a la investigación de la didáctica de matemáticas puntos de vista político-sociales. Las preocupaciones giran en torno a preparar a los estudiantes para ser ciudadanos, usando la matemática como herramienta para analizar críticamente los hechos sociales relevantes, tomando en cuenta las posturas y los conflictos culturales de las personas que intervienen en ellos. Concede mucha importancia por tanto a la comunicación interpersonal democrática en el aula, y reflexiona sobre la relación matemáticas-tecnología en sus consecuencias positivas y negativas. En resumen, el enfoque crítico se enfoca a la red institucional de prácticas de la educación matemática, considerando las relaciones entre todos sus actores. Amplía la dimensión cognitiva y social hasta abarcar aspectos políticos, por eso el tipo de investigación ideal en este enfoque es la investigación-acción, interesada en la emancipación y autogestión de los actores de la red de prácticas.

## **I.6 Investigación acerca de artefactos y teorías para mejorar el aprendizaje de las matemáticas**

La investigación sobre didáctica de matemáticas ha visto con interés creciente la inclusión de artefactos tecnológicos desde su inicio, en los años 50 del siglo XX, impulsada por el hecho de que los objetos matemáticos en sí mismos no son visibles ni manipulables en el sentido físico, y por eso la mediación de diferentes registros semióticos ostensivos no solo es necesaria para expresar una idea matemática ya formada, sino que son parte constitutiva de ella. Raymond Duval (2003) llega a afirmar que no hay *noesis* (visión

intelectual de un objeto, conceptualización teórica) sin *semiosis* (atribución de significado a signos ostensivos). En esta última operación, el poder potencial de la computadora es evidente. Esta idea es una de las que da origen a esta investigación. Autores como Artigue (2004) no dejan de señalar, sin embargo, los riesgos de una utilización ingenua del apoyo tecnológico en la didáctica de matemáticas, uno de los cuales está relacionado con el ocultamiento de la dimensión epistémica en el acto de, por ejemplo, calcular la división entre dos enteros utilizando una calculadora. ¿Qué gana y qué pierde el que la ejecuta? Los profesores conocen el valor epistémico de la solución con lápiz y papel, que permite ver por ejemplo la periodicidad de las cifras decimales, y por tanto de ver un cierto patrón en la división de enteros; mientras que la inmediatez de la solución en calculadora anula esa evidencia. Otra cosa distinta sería usarla para efectuar un gran número de cálculos o probar conjeturas para extraer de ellas el patrón buscado. De ahí la importancia de dar un uso adecuado a la tecnología en ámbitos de aprendizaje para rescatar el valor epistémico de un objeto matemático.

Duval (2000) establece tres principales actividades cognitivas asociadas a los registros de representación semiótica de los objetos matemáticos, a saber, *representación*, *procesamiento* (transformación de representaciones dentro del mismo registro semiótico) y *conversión* entre un registro y otro. A esta última actividad le asigna una importancia mayor en la captación del significado de un objeto matemático por un aprendiz. *Representar-procesar-convertir* constituyen lo que podemos llamar actividad semiótica, y es en dicha actividad donde la herramienta tecnológica puede ser potencialmente valiosa como herramienta cognitiva. La comprensión de un objeto matemático y la solución de problemas requieren de tal actividad, particularmente la de la flexibilidad en los procesos



de conversión, que no está exenta de dificultades como la de la *compartimentalización* de los diferentes registros semióticos, que es la dificultad de fluir entre registros de un mismo objeto, señalada en la investigación de Gagatsis et al. (2006). Los patrones de relación entre registros semióticos, algunos muy abstractos, está en el centro del aprendizaje de matemáticas a nivel universitario.

La actividad semiótica ejecutada con computadoras puede activarse con fines pragmáticos o didácticos, como señala Winslow (2003) a propósito del uso de los sistemas algebraicos computarizados, CAS por sus siglas en inglés. Sistemas de cálculo simbólico o algebraico como MAPLE o MathCad se pueden usar en la actividad matemática convencional (computacional numérica o simbólica) o con el fin de aprender matemáticas. Este autor presenta un uso interesante de actividad semiótica, que llama *potencial de palanca (lever potential)* en el que la computadora se usa facilitando labores de *procesamiento* (como calculadora) y en el caso del trazado de la gráfica de una expresión algebraica, de *conversión* entre registros. Esto permite que el usuario se descargue de operaciones de bajo nivel para ocuparse de las de nivel alto. En su investigación señala el caso de una clase con el tema de ecuaciones diferenciales en la que un estudiante, ante el resultado dado por la computadora, se interroga acerca de un caso particular en el que tal resultado se invalidaría. El profesor responde proponiendo y comprobando una conjetura de solución de nuevo en la computadora. Winslow destaca la operación de alto nivel que fue desarrollada en ese caso, la comprobación inmediata de una conjetura, sin tener que invertir tiempo en el procesamiento a mano, operación que en ese caso no tenía relevancia central.

Existe por otro lado un planteamiento teórico que ha revelado su gran importancia a raíz del advenimiento de las computadoras aplicadas en los procesos de enseñanza y

aprendizaje, y que estudia la influencia de las herramientas técnicas y psicológicas en el comportamiento humano, que es el concepto de *mediación semiótica* de Vygotsky. A pesar de que este autor señaló como punto central de su psicología justamente la idea de *mediación*, Vérillon y Andreucci (2005, 10) señalan:

*However mediation does not appear to have been a major concept in the psychological paradigms that dominated the second half of the 20th century. As Norman [...] once pointed out, “despite the enormous impact of artefacts upon human cognition, most of our scientific understanding is of the [...] single, unaided individual, studied almost entirely within the university laboratory”.*

El abordaje piagetiano se mueve en una relación diádica sujeto-ambiente donde la mediación de instrumentos y artefactos no es central. Sin embargo existen modelos triádicos que incluyen la participación específica de instrumentos y artefactos en la cognición, que es de particular interés en esta tesis doctoral.

### **I.7 Investigación sobre el aprendizaje de matemáticas con la ayuda de computadoras**

Las dificultades de aprendizaje de matemáticas son a menudo un obstáculo mayor en la educación de los estudiantes. Las tecnologías de información y comunicación o TIC, como se ha dicho arriba, ofrecen nuevas oportunidades para enfrentar esas dificultades. A eso se abocan grupos de investigadores en todo el mundo. Un ejemplo saliente es el proyecto europeo de investigación *Kaleidoscope*, cuya labor integra 76 unidades de investigación que cubren una amplia gama de intereses alrededor de la tecnología y la educación, desde lo académico a lo privado.

Una de las unidades de investigación de *Kaleidoscope* es el grupo TELMA (Technology Enhanced Learning in Mathematics), cuyo trabajo es cercano en intereses a esta tesis. TELMA está formado por seis equipos de investigación de varios países que cubren temas sobre el uso de la tecnología informática en el aprendizaje de las matemáticas, y en especial en cuatro asuntos (Artigue, 2006): Las nuevas formas de dar significado a los conceptos matemáticos; nuevas situaciones de aprendizaje que implican uso de tecnología; nuevos tipos de interacciones sociales entre los diferentes actores involucrados en el proceso enseñanza-aprendizaje; y nuevas estrategias de aprendizaje, como la indagación y la construcción colaborativa de significados. Dada la relación entre el trabajo de este grupo y el objetivo de mi propia investigación, se hará un análisis un poco más detallado del mismo.

Los equipos de investigación del grupo TELMA son:

1. (ITD) *Consiglio Nazionale Ricerche. Istituto Tecnologie Didattiche, de Genova, Italia.*
2. (UNILON) *University of London. Institute of Education. Londres, Inglaterra.*
3. (DIDIREM) *Université Paris 7 Denis Diderot. DIDIREM. Paris. France.*
4. (ETL) *National Kapodistrian University of Athens. Educational Technology Lab. Atenas, Grecia.*
5. (MeTAH) *MeTAH and Leibniz. IMAG. Grenoble. Francia.*
6. (Siena) *University of Siena. Department of Mathematics. Siena. Italia.*

Para paliar sus diferencias teóricas, estos equipos intercambian sus artículos y han realizado investigación *cruzada*, en la que cada equipo analiza un mismo problema desde el *marco teórico* de otro equipo, observando la influencia que tiene la postura teórica en el abordaje del problema del aprendizaje de matemáticas con el concurso de recursos

informáticos. Se hará una revisión somera de las teorías involucradas en el trabajo de estos equipos y de sus respectivos objetivos de investigación.

El equipo DIDIREM tiene como objetivo entender la dialéctica entre el trabajo conceptual y el técnico, tomando en cuenta la dimensión institucional de los procesos de aprendizaje; también desarrollar herramientas informáticas para el álgebra y las funciones. Las teorías utilizadas son la teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau; la teoría antropológica de la didáctica de Chevallard y la teoría de los instrumentos y sus variantes, de Rabardel, Artigue, Lagrange y Trouche.

El equipo ETL se interesa por la generación de significados matemáticos en ambientes de TIC y en la influencia sobre ellos de las *normas del salón*; entender el rol del profesor en el salón con TIC. Las teorías aplicadas son la Abstracción Situada de Noss y Hoyles; las Normas del Salón, de Cobb y Yackel; el enfoque socio-constructivista de Lerman; el construccionismo y acceso estructural profundo, del grupo de Papert y Di Sessa.

El equipo ITD estudia cómo las nuevas tecnologías pueden contribuir a la construcción de ambientes innovadores que pueden mejorar el proceso de aprendizaje y cambiar los ambientes tradicionales. Las teorías subyacentes son la teoría de la actividad, de Engeström; los micromundos y teoría relacionadas, de Papert y Di Sessa; y la Abstracción Situada de Noss y Hoyles.

El equipo MeTAH ha diseñado el ambiente de aprendizaje Afluxis para álgebra, y analiza su uso; también por la modelación algebraica de los estudiantes. Las teorías aplicadas son teoría de situaciones didácticas, de Brousseau; CKC de Balacheff; y conceptos de Inteligencia Artificial, de Anderson.

El equipo Siena estudia cómo los significados brotados de actividades con artefactos, pueden evolucionar hacia significados matemáticos bajo la guía del profesor. Las teorías aplicadas son la de mediación semiótica de Vygotsky; teoría de la actividad de Engeström; micromundos y teoría relacionadas, de Papert y Di Sessa; teoría de los instrumentos y cómo los artefactos pueden ser mejor explotados como instrumentos de mediación semiótica, de Rabardel; teoría de los instrumentos de mediación semiótica, de Mariotti y Bussi.

El equipo UNILON estudia la naturaleza de las matemáticas y de la actividad matemática tal como es construida en un texto; la relación que tienen el autor y su lector y de ambos con el texto; y el rol que el texto juega en una situación particular. La teoría en que se apoya es la socio-semiótica, de Halliday.

Los investigadores del grupo TELMA lideran los foros mundiales del tema, y sus artículos están presentes en las revistas especializadas. Las memorias de las conferencias anuales del grupo internacional *Psychology of Mathematics Education* (PME) (Chick y Vincent, 2005; Gutiérrez, Boero, 2006; Novotná et al., 2006), o las de la *European Society for Research in Mathematics Education* (CERME) (Schwank, 1999; Pantazi y Philippou, 2007), dan testimonio.

## **I.8 Intencionalidades que originan esta tesis**

La génesis de esta investigación es la intención de observar, analizar y comprender en profundidad el fenómeno educativo en el que un estudiante pre-universitario se aproxima a objetos matemáticos que introducen a la Derivada, uno de los objetos centrales de las matemáticas, con la mediación de *manipulativos virtuales interactivos* ofrecidos en

la computadora, es decir, representaciones visuales interactivas de objetos dinámicos que presentan una oportunidad para construir conocimiento matemático. El apoyo informático es un recurso o herramienta cuyo poder potencial para transformar la enseñanza y el aprendizaje no puede soslayarse, y cuya influencia real para impactar el aula requiere ser investigada en todos sus aspectos. Asimismo se estudia el efecto de la mediación de los intercambios discursivos del estudiante con un profesor al momento de su actividad con los manipulativos.

Se quiere estudiar una modalidad particular del uso de computadoras con fines educativos, a saber, la posibilidad de disponer de recursos de *visualización e interactividad* a través de manipulativos virtuales pre-diseñados que incorporan las relaciones fundamentales con los que el estudiante puede abstraer las características esenciales de objetos matemáticos tales como *función, razón media de cambio* y otros que introducen a la Derivada. Esta aproximación es completamente intencionada y guiada hacia la formación gradual de *acciones mentales* relativas a algún objeto, pero que se ejecutan externamente en un nivel idealizado sin la presencia física de este, tal como lo propuso Piotr Galperin, un autor perteneciente a la *teoría histórico-cultural* fundada por el psicólogo ruso Lev Vygotsky. Esta teoría está enfocada en la mediación de herramientas materiales y psicológicas en el desarrollo humano, por lo que resulta pertinente a las intencionalidades de esta tesis, y es analizada en el marco teórico.

Tal como señala Churchill (2005), la combinación de *interactividad y visualización* hecha posible por la tecnología digital, ofrece una plataforma única para representar datos, información e ideas, mismos que pueden ser empaquetados en representaciones visuales

interactivas y ofrecidas a los estudiantes como herramientas para enfrentarse con la complejidad de las tareas de aprendizaje.

La incorporación del recurso tecnológico es una de las importantes propuestas de mejora en la educación matemática en los últimos años, por mucho que no haya todavía una total claridad respecto a los procesos y productos involucrados en su uso. Esta incorporación, como se trasluce en lo dicho, rebasa el mero uso de las computadoras como calculadoras numéricas o simbólicas, y puede afectar de raíz el propio diseño curricular, los roles tradicionales de profesor y alumno, las actividades y la evaluación de los aprendizajes al constituirse en herramientas cognitivas.

### **I.9 El tema general de investigación**

Stake (1998) propone que un proyecto de investigación esté basado, primero, en una estructura conceptual de carácter general y abstracto, tal como se reflejaría en una cuestión o tema general (*issue*), antes que en una pregunta concreta. El planteamiento de un tema general obliga entonces a fijar la atención en la complejidad y en la contextualidad de la realidad investigada. El tema en sí mismo sería así un campo generador de preguntas.

Con esta idea, se plantea el *tema* de esta investigación:

- *La relación entre el significado cultural de objetos matemáticos, el uso de artefactos y recursos que median entre un sujeto y tal significado, y el residuo cognitivo en el sujeto debido a su acción sobre estos elementos.*

Este tema puede expresarse en diversas formas. Una podría ser como la *relación entre la cultura, la acción mediada y la cognición* a propósito de algunos objetos matemáticos. Otra, con la terminología de Raymond Duval (2003), como la relación entre la *semiosis*<sup>3</sup> y la *noesis*<sup>4</sup> de esos objetos. También puede expresarse como la relación entre los significados personales y los significados institucionales de referencia mediada por artefactos culturales. Finalmente se trata de la relación entre el individuo y la cultura.

A partir del tema y en un nivel más concreto que le infunde un interés particular, pueden entonces plantearse en forma inicial las preguntas que quiere responder esta investigación.

### **I.10 Primera formulación de las preguntas de investigación**

Con el afán de empezar a comprender el escenario en el que un sujeto se aproxima a un objeto cultural a través de mediación tecnológica y humana, se plantean aquí las siguientes preguntas iniciales:

- *¿En qué consiste en forma precisa el significado de un objeto matemático?*
- *¿En qué circunstancias se puede decir que alguien ha abstraído e internalizado el significado de un objeto matemático y lo aplica?*
- *¿Qué rol puede jugar el uso de manipulativos virtuales pre-diseñados en la abstracción y la internalización de ese significado en un aprendiz?*

---

<sup>3</sup> *Semiosis: proceso en el que algo se torna signo para alguien. Aprehensión o producción de una representación semiótica. Atribución de significado a un signo.*

<sup>4</sup> *Noesis: la aprehensión conceptual de un objeto, o la comprensión de una inferencia. Acto intencional de intelección o intuición.*



- *¿Cuáles características de los manipulativos virtuales pueden ayudar a la internalización de los objetos matemáticos?*
- *¿Cómo es la relación entre las acciones materiales o externas que ejecuta un sujeto y el residuo cognitivo o interno que queda en su mente durante una experiencia de aprendizaje específica?*
- *¿Cuál es el rol que juega la interacción profesor-estudiante en un escenario en el que este último se aproxima a un objeto matemático con la computadora?*

La búsqueda de las respuestas a estas preguntas constituye el objetivo de la investigación. Se hace una re-formulación de las preguntas y una formulación explícita del objetivo después de la revisión de la literatura pertinente.

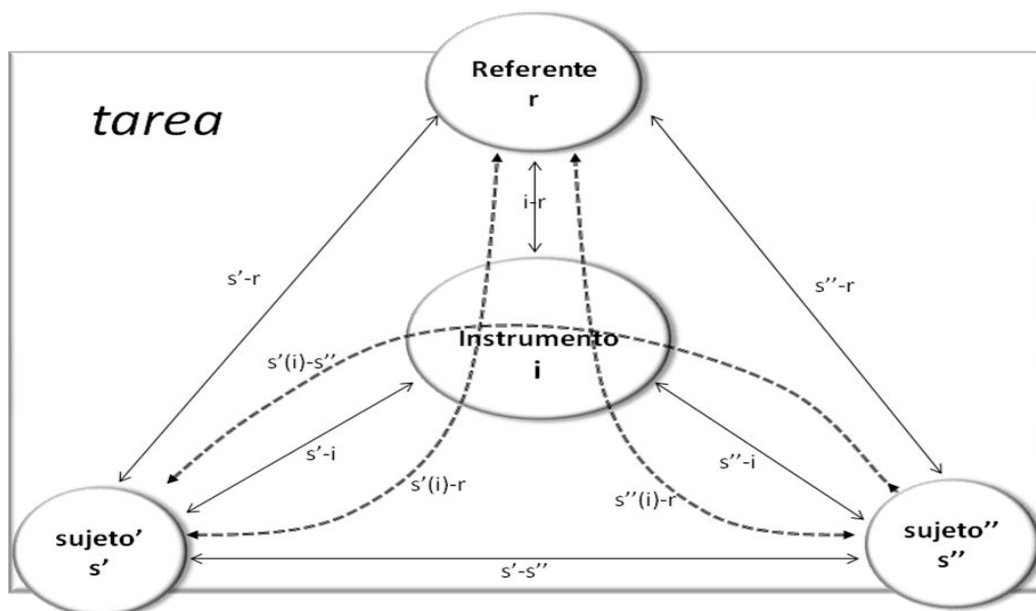
### **I.11 El objeto de estudio de la investigación**

Las interrogantes iniciales del apartado anterior puntualizan que el interés central de esta investigación es el estudio del proceso de *internalización* -en un estudiante pre-universitario- de los signos y las relaciones que caracterizan a los objetos matemáticos que introducen a la Derivada (*función, razón de cambio* media e instantánea, *límite*), mediada por un artefacto, los manipulativos virtuales, y por la interacción con un profesor durante la actividad con la computadora. El tema de la actividad humana mediada por *artefactos* e *instrumentos* (se aclara la diferencia entre ambos en el marco teórico) ha sido tratado por la psicología desde los años 20 del siglo pasado. La importancia de la naturaleza instrumental de los artefactos, como lo puede ser la computadora entre otros, se impuso gradualmente por sí misma y resultó así obvio que la interacción con artefactos no podía entenderse más como una relación diádica sujeto-objeto (Vérillon y Andreucci, 2005). Es claro que los

artefactos pertenecen al mundo objetivo, pero como instrumentos se constituyen en una interfaz entre el sujeto y el mundo. En consecuencia, existen modelos *triádricos* de actividad humana instrumentada que toman en cuenta este hecho (Rabardel, 1995).

El fenómeno de la mediación de herramientas materiales y psicológicas presentes en la actividad humana, es el punto central en la *psicología histórico-cultural* iniciada por Lev Semionovich Vygotsky, por lo que su obra, y las extensiones a la misma hechas por sus discípulos y críticos Alexei Nikolaievich Leontiev y Piotr Yakolevich Galperin, dará el fundamento teórico principal a la investigación hecha en esta tesis. A pesar de que se reconozca el enorme impacto de los artefactos en la cognición humana, este tema no fue explotado suficientemente en la investigación de la segunda mitad del siglo XX, como lo señala Norman (en Vérillon y Andreucci, 2005), y la mayor parte del conocimiento científico en ese terreno tiene que ver con el individuo aislado estudiado en un laboratorio universitario.

El *modelo triádrico* de actividad instrumentada de Rabardel, adaptado por Vérillon y Andreucci (*Figura 2*), incluye por ejemplo las interrelaciones entre dos o más *sujetos s'* y *s''* (lo que en esta tesis sería la interacción entre el estudiante y el profesor), un *referente r* (el significado de los objetos matemáticos estudiados) y un *instrumento i* (los manipulativos virtuales en la computadora, con sus objetos visuales e interactivos).



**Figura 2:** modelo de actividad situada y mediada por un instrumento, de Vérillon y Andreucci:  $s$  es sujeto,  $i$  es instrumento,  $r$  es referente

En este modelo se establecen distintos tipos de relaciones entre los elementos señalados, *sujetos, referente e instrumento*, lo cual se da en el marco de una *tarea*. Se analizará enseguida cada una de estas relaciones que son importantes para plantear una unidad de análisis adecuada a esta investigación.

Tenemos la relación directa *sujeto-referente* ( $s'-r$ ), que es el conocimiento, representación o percepción actual, virtual o recordada que tiene el sujeto respecto al referente (Vérillon y Andreucci, 2005). Esta relación directa, en un escenario didáctico, podría ser también la conexión explícita que haga el profesor entre el estudiante y el referente a través de una suerte de organizadores previos como los propuestos por David Ausubel, apelando a los conocimientos previos del estudiante, o con instrucción específica que se hace en el nivel actual de sus conocimientos. La relación también puede ser incluida

en la *acción de orientación* según lo plantea Piotr Galperin, como se verá más adelante en el marco teórico.

La relación *instrumento-referente* (*i-r*) concierne a la *codificación*, es decir, al conjunto de soluciones semióticas que permiten la transmisión de información sobre el referente a través de signos. Depende de la programación y del diseño de interfaz de los manipulativos computarizados.

La relación *sujeto-instrumento-referente* ( $s'[i]-r$ ) es la relación mediada de los sujetos con el referente durante la *codificación* y *decodificación* de los componentes del significado implícito en el instrumento, o en su abstracción por el sujeto. Esta relación es de interés central en esta tesis.

En la relación entre los sujetos a través del instrumento ( $s'[i]-s''$ ), el papel del instrumento es lo Vygotsky llamaba un *instrumento psicológico*, pues lo que este afecta no es ya un objeto sino la mente propia o la de otros sujetos.

Respecto a la relación entre los sujetos, ( $s'-s''$ ), se puede decir que es una interacción entre individuos cuya importancia deriva de que el individuo se construye en la interacción con los otros. La interactividad que apunta al aprendizaje de los saberes por parte de los alumnos, se traduce en intercambios verbales que pueden ser de naturaleza diferente pero complementaria. Según Weil-Barais y Dumas-Carré (en Morge, 2000), estas interacciones pertenecen a la *tutoría* o a la *mediación*. La *tutoría* es la guía que ofrece el profesor al aprendiz hacia un conocimiento nuevo, y está centrada en ayudar a la producción de respuestas o a la apropiación de procedimientos de tratamiento o control de la actividad cognitiva, cosas que estarían más allá de sus posibilidades sin esa asistencia. La

idea de tutoría está ligada al concepto de *zona de desarrollo próximo* de Vygotsky. Esta labor de *andamiaje* en la *tutoría* tiene que ver con las siguientes operaciones: Enrolamiento del alumno, la reducción del grado de libertad en la realización de la tarea, el mantenimiento de la orientación, la señalización de las características determinantes para la ejecución de la tarea, el control de la frustración del aprendiz y la demostración.

Por su lado, la interacción de *mediación* del profesor, que sería un apoyo para alcanzar la posterior *mediación semiótica* de la que habla Vygotsky, considera la intervención verbal como un acto y no como la simple expresión de un saber a transmitir o una representación mental independiente del enunciado y de su contexto. En las interacciones de *mediación* el profesor negocia con los alumnos los cambios cognitivos, y tiene que ver con significados, reglas, normas y convenciones. En el apartado de marco teórico se analizan estas formas de interacción profesor-estudiante.

Para estudiar y comprender el funcionamiento de este modelo, en el que un sujeto se aproxima a un referente con la mediación de un instrumento, se apela a la *teoría histórico-cultural* iniciada por Lev Vygotsky (Vygotsky, 1978, 2001), teoría que se aboca justamente al estudio del fenómeno de la *mediación* de herramientas técnicas y psicológicas, esta última llamada *mediación semiótica*, e importantes conceptos relacionados con ella como son los conceptos de *internalización* y *zona de desarrollo próximo*. El desarrollo de los fenómenos psicológicos pueden estudiarse en esta teoría en distintas escalas temporales, que van desde la consideración del desarrollo a nivel de la especie humana o *filogenia*, pasando por el desarrollo de una cultura o *histórico-cultural*, y por el desarrollo en el espacio de la vida de un hombre u *ontogenia*, para terminar en el estudio del desarrollo en lapsos cortos de tiempo o *microgénesis* (Wertsch, 1988). El interés de esta investigación

está en la *microgénesis*, o sea en aquellos fenómenos que suceden *frente a nuestros ojos* en cuestión de segundos, minutos, horas o unos cuantos días, según el objeto y los sujetos de aprendizaje.

Si bien la *teoría histórico-cultural* de Vygotsky dirige la reflexión y el trabajo de esta investigación, es sin embargo complementada con matices, aportes, críticas y extensiones a la misma hechos por otros investigadores de raíz *histórico-cultural*, como se ha dicho, Leontiev (cuyo interés es la *actividad* humana con objetos cómo génesis del desarrollo cognitivo y de la consciencia) y Galperin (cuyo interés es la *internalización* y la *formación paso-a-paso de acciones mentales*, que servirá de modelo para las tareas en esta investigación); también se aludirá al trabajo *histórico-cultural* de Pierre Rabardel, François Vérillon, y Collette Andreucci (que proponen la distinción entre *artefacto* e *instrumento*, y *un modelo de actividad mediada por instrumentos*).

Un apoyo teórico externo a la *teoría histórico-cultural* es el necesario para caracterizar en forma detallada al *referente* en el modelo o escenario de actividad, o sea, al objeto de aprendizaje del cual se intenta alcanzar la comprensión o el significado a través de una serie de tareas. Una manera de describir al *referente* puede ser a través del conjunto de prácticas y recursos culturales que lo definen, y que son el resultado cultural esperado de la experiencia educativa específica. El referente es entonces el repertorio de comportamientos de orden superior (conscientes, de origen social y que usan signos) relativos a un objeto matemático. Lo que se necesita en este rubro es una *caracterización* del significado en términos de tales prácticas, para que faciliten el diseño y la programación de las tareas que apunten a su logro. La educación matemática tradicional señala dos componentes de la comprensión: Conceptos y procedimientos, mientras que en una

aproximación didáctica más amplia que involucra una visión antropológica y semiótica, que define el significado en términos de prácticas humanas, se amplía el espectro para incluir a las propias situaciones problemáticas, las distintas formas de representación matemática, el dominio de los algoritmos y los argumentos para validarlos. O sea, que hay prácticas *discursivas* y *operativas* que definen al significado. Apelaremos entonces, para caracterizar al referente, a un enfoque que incorpora las vertientes antropológica y semiótica, ambas con orientación pragmática, como lo es el enfoque *onto-semiótico de la didáctica de las matemáticas*, de Godino (2006). Este enfoque primero establece los componentes del significado de un objeto matemático que han sido ya mencionados, y luego establece la relación semiótica *expresión-contenido* entre cada uno de ellos con los demás, en combinaciones elementales y sistémicas, llamadas *funciones semióticas*, que son unidades de significado que permite focalizar las tareas y los esfuerzos didácticos y de evaluación. El enfoque hace una muy importante distinción entre el *significado personal* y el *institucional*, es decir, entre el nivel cognitivo y el epistémico del significado, asunto conectado con la articulación del conocimiento cotidiano y científico, o bien con las dimensiones individual y social en la obra de Vygotsky.

La caracterización del *instrumento* (los manipulativos virtuales interactivos) estaría representada por las modalidades o posibilidades técnicas generales del mismo, y por las características de sus herramientas incorporadas. Las más importantes son, como se ha dicho, la *visualización* y la *interactividad* incorporadas en los manipulativos virtuales. Ambas pueden encontrarse en un software de acceso general, como la hoja de cálculo *Excel* que, además, no depende de tener conexión a internet en el aula ni requiere tiempo para su descarga. Sedig y Hai-Ning (2006) han identificado doce factores de interactividad de una

herramienta que tenga intenciones didácticas, y las presenta en la forma de un marco descriptivo que orienta el diseño y da criterios de evaluación de los instrumentos.

En resumen, con la teoría *histórico-cultural*, complementada con algunos conceptos y herramientas de otras fuentes que se describen en el marco teórico, se abordará el objeto de estudio de esta tesis que es la *internalización*, en un aprendiz, del significado pragmático de varios objetos matemáticos que introducen a la *Derivada*, *internalización* que puede concretarse en un *escenario de actividad* situada y mediada por un instrumento.

## **I.12 Justificación**

La relación entre los procesos cognitivos y la actividad humana, como la de la enseñanza escolar, es el objetivo de la investigación desde la *psicología del desarrollo*, en cuyo horizonte se inserta esta investigación. La interacción aprendizaje-desarrollo cognitivo se ha estudiado desde ciencias diversas, que van desde la psicología a la semiótica, pasando por la antropología y la sociología. La relación esbozada por el psicólogo ruso Lev Vygotsky desde la postura teórica *histórico-cultural*, en la que el *buen* aprendizaje es aquel que impulsa al desarrollo y no al revés como lo veía Piaget, es en la que quiere profundizar esta tesis. En particular el interés está puesto en el efecto de la mediación de recursos culturales en la cognición de un estudiante pre-universitario, a propósito de la *internalización* del significado pragmático (o repertorio de prácticas) de objetos matemáticos que introducen a la *Derivada*. El interés finalmente está puesto en la relación individuo-cultura, que es un asunto central en la psicología educativa y en esta investigación.



El aprendizaje y el desarrollo no se conectan linealmente ni actúan en paralelo, como una sombra que sigue a su objeto según la imagen de Vygotsky (1978), sino que tienen relaciones dinámicas complejas en las que formas distintas de enseñanza se conectan con el desarrollo en una forma única. Esta tesis doctoral estudia la manera en la que la acción de estudiantes con los manipulativos virtuales prediseñados y la interacción discursiva con un profesor se conectan con su desarrollo cognitivo, medido como la capacidad de resolver ciertos problemas sobre objetos matemáticos que introducen a la Derivada, lo que implica la comprensión teórica y empírica de todos los aspectos de su significado.

A pesar de la importancia que tiene la mediación de artefactos culturales en la relación aprendizaje-desarrollo, y de que el mismo Vygotsky señalara que justamente el estudio de la mediación de herramientas materiales y psicológicas en la mente humana era la base de su trabajo, la mayor parte de la investigación psicológica de la primera mitad del siglo XX, como ya se ha dicho, no refleja esta importancia, sino que más bien se ha estudiado al individuo actuando aislado de la influencia cultural presente en los artefactos y en la interacción con otros individuos. Por eso esta investigación se enfocará en un escenario de actividad cultural que incluya al sujeto cognitivo, al referente epistémico, y los recursos culturales presentes en el lenguaje del profesor y en los artefactos utilizados, en este caso los manipulativos virtuales.

Piotr Galperin, continuador del trabajo de Vygotsky en la línea en la que se inserta esta tesis, se enfocó en el estudio de la relación enseñanza-desarrollo ya esbozada por Vygotsky, en particular en la formación guiada e intencional de *acciones mentales* (aunque externalizadas) a partir de *acciones materiales*, ambas ligadas al mismo objeto. Con la

ayuda de colegas y asistentes llevó a cabo más de 800 experimentos cuyos resultados permanecen publicados sólo en lengua rusa, con algunas pocas excepciones traducidas al inglés. De estas traducciones, la mayoría se refiere a experimentos con niños. Lo que aportará esta investigación es tener un estudio dirigido a estudiantes pre-universitarios que utilizan la mediación de manipulativos computarizados. También se aportará el hecho de que se contará con un estudio en el que el referente de las *acciones mentales* es una serie de objetos matemáticos que introducen el Cálculo Diferencial, del que no hay referencia en los trabajos de Galperin al menos en aquellos traducidos en algún idioma diferente del ruso.

Por otro lado, el escenario estudiado en esta tesis involucra la actividad de un estudiante ligada a objetos con fines de desarrollo cognitivo, tal como se estudia específicamente en la *teoría de la actividad* de Leontiev, representante de otra rama de la *teoría histórico-cultural* presente en la tesis. La elección de la postura desde la *actividad* toma en cuenta la crítica que hace Ilyenkov (2007) acerca de la dificultad que muestran los estudiantes de todo nivel, en particular los universitarios, para aplicar lo que saben a casos prácticos que requieren de ese conocimiento. La razón que da Ilyenkov sobre esa incapacidad, apoyada en argumentos de Emmanuel Kant, es que en el aprendizaje escolar por lo general el conocimiento no nace junto con su objeto, sino que se basa en un juego lingüístico alrededor del objeto. Para decidir si se aplica una regla general (el conocimiento) a un caso particular (un objeto), siendo el objeto y el conocimiento entidades separadas, se apela inútilmente a la habilidad llamada *poder de juicio*. Este problema no tiene solución racional, según argumenta Ilyenkov. La única manera de resolverlo es cambiando la situación de raíz, haciendo que el conocimiento quede unido a su objeto desde el principio, a través justamente de la *actividad* del estudiante *con* el objeto, no con el

discurso sobre él, tal como se concibe en la postura filosófica que sustenta a la teoría histórico-cultural, que es el materialismo dialéctico.

En consecuencia, esta tesis estudia un escenario en el que el estudiante actúa sobre unos objetos que son las representaciones semióticas de objetos matemáticos para que el conocimiento nazca como conocimiento *de esos* objetos. Esto permitirá identificar las diferencias entre el conocimiento de las cadenas lingüísticas relacionadas al objeto y el conocimiento del objeto mismo.

Por otro lado, los resultados de mi investigación permitirán conocer un aspecto de la relación aprendizaje-desarrollo en estudiantes que tienen un *primer contacto* con los objetos matemáticos relacionados con la Derivada, conocimiento logrado a través de la relación entre la acción con manipulativos virtuales interactivos y la interacción con un profesor, y el efecto cognitivo en el estudiante. La inmensa mayoría de los estudios disponibles sobre el aprendizaje de la Derivada en todas las aproximaciones teóricas, tiene que ver con el análisis de experiencias con estudiantes que han terminado ya un curso universitario de Cálculo, y que estudian *a posteriori* los conceptos o los esquemas erróneos o inexistentes de estos estudiantes.

El estudio del *escenario de actividad* descrito en esta tesis puede ofrecer resultados útiles a profesores de matemáticas de todos los niveles educativos y a diseñadores de material didáctico, brindando bases científicas a un tipo de uso de la herramienta tecnológica, que podría además disminuir el tiempo en que los estudiantes conceptualizan y relacionan objetos matemáticos importantes en un contexto escolar de programas de estudio

que marchan generalmente contra reloj, cosa que obliga al profesor a ganar en extensión (cubrir el programa) y perder en profundidad (la comprensión de los estudiantes).

El uso de apoyos tecnológicos puede contribuir a transformar la labor docente, pues la programación de actividades de aprendizaje que incluyen a la computadora requiere de una reflexión tanto epistémica como cognitiva y por supuesto relativa al uso de medios y recursos didácticos. Pero por otro lado, hay que reconocer que los resultados educativos del uso de las tecnologías de información y comunicación o TIC están lejos de ser claros. Según el reporte PNER (Programme Numérisation pour l'Enseignement et la Recherche, Lory, 2002), no existe una prueba científica de la eficacia superior de la enseñanza con las TIC (tecnologías de información y comunicación) en relación a la enseñanza que no las integra. El reporte señala también que es urgente dejar atrás una visión centrada en los aspectos técnicos para enfocarse en las repercusiones reales de las TIC sobre la enseñanza y el aprendizaje, cuestión que da a la presente investigación una motivación importante para intentar conocer un poco más sobre el efecto potencial de las TIC en el aprendizaje de los estudiantes de Cálculo.

Una propuesta didáctica que incorpora TIC implica también la necesidad de la especificación minuciosa del significado de los objetos estudiados, con lo que se tendría una mayor claridad tanto en este significado de los objetos matemáticos como en los elementos para la evaluación de los aprendizajes tanto elementales como sistémicos de los estudiantes.

Visto desde la profesión de maestro de matemáticas, no está claro aún ni el rol ni el verdadero impacto del uso de la tecnología para efectos de aprendizaje, ni a nivel micro

(estudiante individual) ni macro (sistema educativo) (Lory, 2002), si bien el rol e impacto mencionados engloban un horizonte variado de acciones, ya que hay una gran variedad de formas potenciales de uso. A pesar de tener un gran potencial, las TIC no son una herramienta generalizada entre los profesores de matemáticas. Los resultados de esta investigación podrían contribuir a motivar a profesores de matemáticas al uso de la TIC en su trabajo.

Se ha mencionado que el recurso tecnológico podría acelerar procesos de aprendizaje de los estudiantes, de tal forma que el tiempo ganado en la conceptualización puede aplicarse a profundizar otros aspectos o a la resolución de problemas más complejos y aplicaciones más interesantes. Además, la modalidad de trabajo con computadoras hace que el estudiante haga una aproximación intuitiva y visual a los objetos matemáticos (*razón de cambio, límite, continuidad, Derivada*, aplicaciones), en la que se aprende *con* y no *desde* la computadora, que resulta ser así un socio cognitivo que no piensa por el estudiante sino que lo impulsa a la abstracción de patrones y a formular conclusiones por sí mismo.

Cuando finalice esta investigación, es decir, cuando se comprenda tanto el proceso como el producto de la acción con manipulativos virtuales en el aprendizaje de objetos matemáticos que introducen el Cálculo Diferencial, se tendría más información para que los profesores de matemáticas cuenten con una alternativa fundamentada para sus esquemas docentes, respecto a las formas estereotipadas de interacción profesor-alumnos, y a la tradicional linealidad curricular, todo esto con el fin de contribuir a abatir el bajo nivel matemático que priva en general en el sistema educativo de México (OCDE, 2003). El modelo propuesto puede contribuir a hacer un uso más sistemático del recurso tecnológico,

pues este se dirige a objetivos precisos: La construcción de los signos, los objetos y las relaciones específicas que constituyen el significado de algún objeto matemático.

Visto desde el estudiante de Cálculo, quien es el destinatario final de lo que pueda aprenderse de esta investigación, se podría contribuir a modificar con ventaja el esquema docente por transmisión de saberes del docente y los textos al estudiante, aprovechando la natural soltura de estos en el uso de computadoras y el lenguaje visual más cercano a su cultura. Al manipular una herramienta visual e interactiva, se pueden detonar quizá con más facilidad procesos reflexivos que son más difíciles de lograr con otras aproximaciones, según muestran los resultados de evaluaciones como PISA (OCDE, 2003). Puede considerarse como un aporte el hecho de que el primer contacto con los objetos matemáticos complejos no la hace el profesor, sino que son producto de la interacción del estudiante con la computadora, rompiendo el rol estereotipado del profesor trasmisor (fuente única de saber)-alumno receptor.

Desde el punto de vista metodológico, se discutirán las ventajas de emprender una investigación en el dominio *microgenético*, es decir, en una escala temporal muy corta de una o dos sesiones. El hecho de poner el foco en los detalles microgenéticos de las secuencias de comportamiento durante las observaciones en periodos cortos de tiempo, permitirá al investigador *ver* directamente los procesos de cambio. Esto incluye la observación de cortísimos comportamientos de transición que no podrían captarse con otros métodos con análisis más agregados (Lavelli, Pantoja, Hsu, Messinger y Fogel, 2005). Los estudios microgenéticos se enfocan en el estudio del cambio al nivel de descripciones detalladas de los procesos, y conllevan aspectos cuantitativos y cualitativos que arrojan luz sobre la naturaleza de los estados transicionales. Por la densidad de las observaciones, los

investigadores pueden seguir la traza de las trayectorias de desarrollo para un comportamiento particular, aclarando los componentes estables y cambiantes de los patrones de comportamiento. Esto permite identificar puntos de transición desde la presencia de un patrón de comportamiento hasta la presencia de otro que no puede detectarse con métodos longitudinales. A esto puede añadirse el hecho del uso de un software especializado en registrar toda la actividad que se desarrolla en la pantalla de la computadora, como será el caso de la actividad con los manipulativos. El software a usar en esta tesis será *Adobe Captivate*, que se constituirá en una valiosa herramienta microgenética que se constituye como una *ventana a la mente* del usuario (Clements, 1999), pues posibilita la captura de toda acción ejecutada por el estudiante en la pantalla de la computadora mientras usa los manipulativos, así como el audio simultáneo del diálogo con el profesor.

En consecuencia a lo mencionado arriba, los diseños microgenéticos permiten al investigador estudiar la variabilidad individual, es decir, enfocar en el asunto de la estabilidad e inestabilidad del comportamiento individual a través del tiempo y de diferentes condiciones (Lavelli et al., 2005), así como el conocimiento de los procesos de generalización, abreviación, concientización de las acciones materiales en su camino hacia las acciones mentales. Finalmente, los diseños microgenéticos permiten identificar las condiciones bajo las cuales es más probable que ocurra el cambio.

Por otro lado, al permitir examinar los mecanismos que subyacen al cambio, el diseño microgenético permitirá al investigador formular hipótesis acerca de los potenciales parámetros responsables de este, para probarlas quizá en futuros diseños experimentales. Por tanto, los diseños microgenéticos pueden hacer crecer el conocimiento de los procesos

de cambio al darnos la oportunidad de explicar, además de describir, estos procesos, como será el caso de esta tesis.

### **I.13 Factibilidad**

La investigación se llevará a cabo comenzando con el trabajo conjunto del estudiante y el profesor al frente de una computadora Laptop en la que están cargados los manipulativos virtuales así como también el software *Adobe Captivate* que hace el registro en audio y video de la actividad. El tiempo para la recolección de datos es el de una sesión de aproximadamente dos horas, que pueden ser divididas en dos o más sesiones parciales, dependiendo del avance y preferencias del estudiante. No son necesarios fondos para realizar la investigación. Por otra parte, la experiencia del investigador como profesor y el conocimiento del diseño y uso de las herramientas cognitivas en la práctica cotidiana de clase, permiten al investigador estar cerca del fenómeno a investigar, y el que las hipótesis de trabajo de la investigación puedan estar fundamentadas en la experiencia docente. La recogida de datos se da en una dinámica de diálogo y en un escenario que no busca alterar el comportamiento normal de los actores.

Por otro lado, el estudio tiene una aplicación práctica, pues contribuye a comprender un problema real cuyo fin es generar, facilitar y acelerar la apropiación del significado de objetos matemáticos abstractos en el estudiante, e introducir gradualmente nociones y procedimientos a partir de actividad objetual o material. También tiene un valor teórico, pues se puede conocer un poco más sobre la relación entre aprendizaje y desarrollo cognitivo en lo que toca al significado de objetos matemáticos relacionados a la Derivada, además de que se propone un modelo que articula las teorías que están involucradas en el



fenómeno y que son estudiadas en el marco teórico. Desde el lado metodológico, se aprovecha un uso interesante y aún poco explotado de software de captura de pantalla (como *Adobe Captivate* o *CamStudio*), que pueden registrar la acción del estudiante con los manipulativos y los intercambios discursivos con el profesor.

Por último, la investigación se mueve en un horizonte ético, pues los sujetos no están expuestos a situaciones desagradables ni degradantes, sino que trabajan en un ámbito convencional, si bien la actividad no está ligada a la evaluación característica de la práctica escolar común por lo que no existe tampoco el tipo de coacción sutil en la que el profesor detenta el poder de decidir sobre la calificación del alumno.

[\(A la tabla de contenidos\)](#)

## II . Marco teórico

*“Une théorie n'est pas la connaissance, elle permet la connaissance.  
Une théorie n'est pas une arrivée. C'est la possibilité d'un départ.  
Une théorie n'est pas une solution, c'est la possibilité de traiter un problème”<sup>5</sup>.  
Edgar Morin.*

### II.1 Introducción

En el apartado de Objeto de Estudio, se ha mencionado que esta investigación se enfoca en explicar cómo funciona un modelo de actividad humana mediada por instrumentos, en el que un estudiante internaliza las prácticas culturales que caracterizan al significado pragmático de objetos matemáticos que introducen a la *Derivada*, con la mediación de manipulativos computarizados y de otro sujeto más capaz. La *teoría histórico-cultural* de Lev Vygotsky, con sus conceptos de *mediación*, *internalización* y *zona de desarrollo próximo*, proporciona un fundamento adecuado a ese fin. Esta teoría y dos de sus ramas principales representadas por los trabajos de A. N. Leontiev y Piotr Y. Galperin, serán estudiadas en este *marco teórico*, y serán complementadas con algunas ideas provenientes de otras teorías que ayudarán a caracterizar al *instrumento* y al *significado* de los objetos que introducen a la *Derivada*.

El papel que la teoría tiene en la investigación en ciencias sociales fluctúa entre dos extremos (Flick, 2007): uno es la visión tradicional cuantitativa, en la que la investigación parte de un modelo (teórico) de las relaciones supuestas, del que se deriva una hipótesis que se operacionaliza y se somete a la contrastación empírica. Los casos estudiados son

---

<sup>5</sup> Una teoría no es el conocimiento, ella permite el conocimiento. Una teoría no es una llegada. Es la posibilidad de una partida. Una teoría no es una solución, es la posibilidad de tratar un problema.

entonces ejemplares, no excepcionales. El otro extremo lo podría representar la *teoría fundamentada*, en la que los supuestos teóricos se descubren a través de los datos empíricos tomados del campo de estudio, que se complejiza al incluir al contexto. Aunque una investigación no se emprende como una *tabula rasa*, sino que, como dice Kleinig (citado por Flick, 2007) *se requiere una pre-comprensión de los hechos en estudio que debe considerarse como preliminar y debe superarse con información nueva, no-congruente*.

O como lo dice Flick mismo (2007, 58):

*Los supuestos teóricos se vuelven relevantes como versiones preliminares de la manera de comprender el objeto que se estudia y la perspectiva sobre él, que se reformulan y sobre todo se elaboran más durante el proceso de investigación. Estas revisiones de las versiones a partir del material empírico hacen avanzar la construcción del objeto de estudio.*

El modelo de investigación que resulta es el llamado *modelo circular* de Glaser y Strauss (citado en Flick, 2007), que consiste en que, partiendo de una pre-suposición teórica, se estudian secuencialmente casos que son comparados entre sí, comparación de la que *brot*a o en la que se descubre en última instancia la teoría. Este proceso hace justicia al carácter de descubrimiento en la investigación cualitativa. El papel relativo de las *teorías como versiones del objeto que hay que reformular*, tiene en cuenta con más seriedad la construcción de la realidad en el proceso de investigación. La versión preliminar de los supuestos en esta tesis está apoyada por el conocimiento que del campo problemático tiene el profesor-investigador, tanto en el dominio del significado de los objetos matemáticos meta, como del diseño de manipulativos virtuales que apuntan a ese significado.

## **II.2 Fundamento teórico para explicar la actividad humana mediada por herramientas y signos: La teoría histórico-cultural<sup>6</sup> iniciada por Lev Vygotsky**

Según Wertsch (1993), *el objetivo básico de la aproximación histórico-cultural a la mente es elaborar una explicación de los procesos mentales humanos que reconozca la relación esencial entre estos procesos y sus escenarios culturales, históricos e institucionales* (Wertsch, 1993, 23). Esto implica una antinomia entre las posturas tradicionales de los que piensan que todo (en los procesos mentales) depende del individuo, frente a los que piensan que todo depende de la sociedad (Wertsch, 1997); mientras una postura dice que los individuos son los que deciden hacer algo, la otra dice que las decisiones de estos están condicionadas socialmente. Unos dicen que el individuo es el valor supremo y lo único real y que la sociedad es un medio y una abstracción posterior, y los otros dicen lo contrario. Es necesario que toda investigación formule su postura a este respecto para que no sea malinterpretada o rechazada (Wertsch, 1997). La antinomia aquí referida es en el fondo aquella que existe entre el funcionamiento mental y el marco socio-histórico-cultural, o bien entre individuo y sociedad.

Wertsch propone que estos dos elementos se entiendan como momentos dialécticos que intractúan, o elementos de algo más general, la *acción humana*, en la que se

---

<sup>6</sup> Ni Vygotsky ni sus discípulos rusos usaron el término histórico-cultural, sino el término socio-histórico o bien cultural-histórico para referirse a su trabajo. Pero Michael Cole (1997) en el libro *La mente histórico-cultural*, titula su artículo acerca de la obra de Vygotsky en forma provocadora como *La psicología socio-cultural-histórica*, e Ivic (1999) dice que si hubiera que resumir en una frase la obra de este autor bieloruso, diría que se trata de una teoría socio-histórico-cultural del desarrollo de las funciones mentales superiores. En estas dos referencias se quiere enfatizar la importancia que tienen las tres vertientes que confluyen en la teoría. Sin embargo se ha impuesto el término histórico-cultural pues, en la opinión de Cole (1997), es mejor para abordar la manera en que esta herencia ha sido apropiada en Occidente. En adelante, cuando se mencione a la teoría histórico-cultural, se estará aludiendo a la teoría socio-histórico-cultural de la psicología soviética.

interrelacionan. *Tomar la acción humana como unidad de análisis para la investigación histórico-cultural quiere decir que se trata del objeto fundamental a describir e interpretar* (Wertsch, 1997, 52). Esta idea contrasta con las posturas en las que lo que se describe e interpreta son las actitudes, los conceptos, las estructuras lingüísticas y cognitivas u otras, que son útiles para estudiar otros aspectos de la *acción*. Sin embargo, la *acción* es una noción escurridiza que a menudo provoca que las investigaciones pierdan involuntaria y sutilmente su foco. Autores enfocados en la *acción* (Vygotsky, Leontiev, Bajtin, Voloshinov, Bourdieu, Burke, Certeau, Dewey, mencionados en Wertsch, 1997) tienen en común que se interesan en la acción humana concreta, dinámica y dada en contextos reales, a diferencia de otros autores interesados en aspectos abstractos.

Las principales escuelas de psicología han diferido ampliamente en la unidad de análisis adoptada. Los conductistas eligieron asociaciones estímulo-respuesta, los psicólogos de la Gestalt se concentraron en las *gestalt*; los piagetianos examinaron *esquemas*. Puede decirse que en general hay dos enfoques: El que conciben al individuo como un recipiente pasivo de información del medio ambiente, donde están los conductistas y neo-conductistas (tradición de Locke), y los centrados en el individuo que conciben al ambiente como algo secundario que desencadena ciertos procesos evolutivos, y a la mente humana conformada por categorías y estructuras innatas (como Chomsky, en la tradición de Descartes).

La *acción* concibe al ser humano en contacto con su ambiente, creándolo su ambiente y a sí mismo por medio de las acciones en las que se involucra. Para comprender las funciones mentales, no se estudia al ambiente y al individuo en aislado.

La postura de Wertsch se relaciona con una forma de acción emparentada con la *acción teleológica* de Habermas y con la *actividad* vista por Leontiev (analizada más adelante), que tienen una meta, y no ven al individuo en aislado, sino empleando instrumentos mediadores como herramientas y el lenguaje, ya que estos afectan la acción de modo esencial. La respuesta sobre quién lleva a cabo la acción, es el individuo en una situación concreta junto con los instrumentos mediadores empleados.

Por otra parte, el desarrollo del conocimiento matemático, que es de particular interés en esta investigación, se debe en buena parte a una interacción entre teoría y práctica. Una parte importante de esta relación le corresponde a las herramientas técnicas (lenguaje, guijarros, ábaco, regla, compás, computadora) con las cuales realizar actividades *indirectas o mediadas* (Mariotti, 2000). Estas herramientas tienen dos funciones, una orientada a lo externo, que tiene que ver con llevar a cabo una acción, y otra interna, relacionada con controlar esa acción, distinción que es corroborada en los estudios sobre uso y desarrollo de la tecnología, y que tiene sus raíces teóricas en el constructo de *mediación semiótica* de Vygotsky (1978). Este autor distingue claramente entre la función de mediación que hace una *herramienta* (dirigido a lo externo, al dominio de la naturaleza) y el que hace un *signo* (la *mediación semiótica*, interna, dirigida al dominio de uno mismo), aunque psicológicamente ambas son vistas como algo que modifica el comportamiento humano.

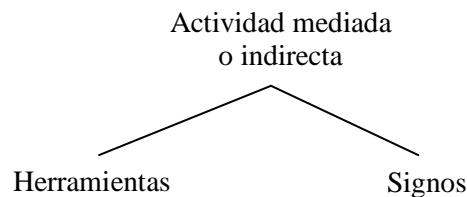
El uso del término herramienta psicológica referido a los signos, viene de la analogía entre herramientas y signos, pero también de la relación entre una herramienta específica, su uso externo y su contraparte interna, pues según Vygotsky, (1978), *the*

*mastering of nature and the mastering of behavior are mutually linked, just as man's alteration of nature alters man's own nature.*

Lo que transforma a una herramienta en una herramienta psicológica, es el proceso de *internalización*, es decir, la creación de nuevos significados a través del uso de una herramienta externa. El ejemplo puesto por el propio Vygotsky es el del sistema para contar, producido y usado para medir cantidades, y que luego es *internalizado* para resolver otros problemas, lo que implica organizar y controlar el comportamiento de la mente. Otro ejemplo de *internalización*, dado por Mariotti (2002), es el observado en un experimento con el compás que usan los niños de escuela primaria, que paulatinamente deja de ser el instrumento de metal para irse convirtiendo en un objeto mental que es evocado o sustituido con los movimientos corporales y gestos de los niños al rotar manos y brazos.

### II.2.1 Herramientas y signos

En la teoría *histórico-cultural* los signos no son referidos a ellos mismos, sino siempre en una analogía-diferencia con las herramientas. Signos y herramientas son parte de la herencia cultural humana y de su evolución histórica. Aunque se diferencian, Vygotsky (1978) las considera en la misma categoría de mediadores:



**Figura 3:** actividad indirecta o mediada

*The basic analogy between sign and tools rests on the mediating function that characterizes each of them. They may, therefore, from the psychological perspective, be subsumed under the same category. We can express the logical relationship between the use of signs and tools using the schema in figure below [Figura 3], which shows each concept subsumed under the more general concept of indirect (mediated) activity (Vygotsky, 1978, 54).*

En *Mind in Society*, Vygotsky (1978) afirma el lazo profundo de ambas y también que su articulación constituye el centro de la actividad psicológica superior y la condiciona profundamente:

*The mastering of nature and the mastering of behavior are mutually linked, just as man's alteration of nature alters man's own nature [...] The use of artificial means, the transition to mediated activity, fundamentally changes all psychological operations just as the use of tools limitlessly broadens the range of activities within which the new psychological function may operate. In this context, we can use the term higher psychological function, or higher behavior as referring to the combination of tool and sign in psychological activity (Vygotsky, 1978, 55).*

Según esta cita de Vygotsky, el dominio de la naturaleza y el del propio comportamiento están enlazados, pues al modificar la naturaleza, el hombre se modifica él mismo. Las actividades mediadas cambian fundamentalmente las operaciones psicológicas, tal como el uso de signos expande el rango de actividades de una nueva función psicológica. En ese contexto, podemos usar el término *función psicológica superior* como la combinación de



signos y herramientas en la actividad psicológica. La idea de que el funcionamiento cognitivo está afectado por el uso de signos y herramientas está en la base de la idea de *mediación semiótica*.

Se subraya la diferencia entre herramientas técnicas (*herramientas*) y herramientas psicológicas o de mediación semiótica (*signos*). Su diferencia sustancial reside en el modo en que afectan el comportamiento humano. Las herramientas tienen una finalidad externa, el dominio de la naturaleza; los signos tienen finalidad interna, el dominio de uno mismo, un medio interno de control. Pero no son excluyentes, pues pueden usar la misma herramienta y expresar la dualidad de la relación del uso externo e interno. En *Pensamiento y Lenguaje*, Vygotsky (2001) subraya que las *funciones psicológicas superiores* son unidas por una característica común, ser procesos mediados, es decir, que incluyen el empleo de signos como medio de control de procesos psíquicos.

Como lo señala Falcade (2006, 7):

*Vygotsky pose ici comme problème central, celui des moyens grâce auxquels l'homme contrôle et oriente son propre comportement. A ce propos, il identifie une classe d'outils fonctionnellement omniprésente dans les fonctions psychiques supérieures: celle des signes. Puis il évoque les évolutions fonctionnelles du mot pour le sujet: à l'origine moyen de formation des concepts, il devient moyen de leur symbolisation.*<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup> Vygotsky plantea aquí como problema central, aquél de los medios gracias a los cuales el hombre controla y orienta su propio comportamiento. Con ese propósito identifica una clase de herramientas funcionalmente omnipresente, en las funciones psíquicas superiores: la de los signos. Luego evoca las evoluciones

Esta cita se refiere a la *palabra* como medio de formación de conceptos que luego resulta ser el medio de su simbolización. Pero en el presente trabajo de investigación se extenderá esta propiedad de la palabra a otros signos, como los signos matemáticos relacionados con la Derivada.

## II.2.2 Funciones psicológicas elementales y superiores

Vygotsky observó cómo funciones psicológicas como la memoria, la atención, la percepción y el pensamiento, aparecen primero en una forma primaria para luego cambiar a formas superiores (en Wertsch, 1988), cambio que está relacionado con la distinción correspondiente entre las líneas de desarrollo natural y social. La línea natural (elemental) se enfoca en los procesos psicológicos comunes a animales y al hombre, y la social (superior) a los específicamente humanos que son producto de un medio histórico-cultural, y que se refiere a procesos de un nivel cualitativamente superior de funcionamiento psicológico. Esto último implica que no pueden explicarse los procesos superiores a partir de los principios explicativos elementales; por ejemplo el desarrollo del pensamiento no puede explicarse exclusivamente con aspectos biológicos.

Wertsch (1988), al leer los trabajos de Vygotsky relativos a este punto, destaca los cuatro principales criterios que diferencian las funciones psicológicas *elementales* de las *superiores*.

Primeramente, en las funciones *elementales* el control está en el entorno, determinado totalmente por la estimulación ambiental, mientras que en las *superiores* está

---

*funcionales de la palabra por el sujeto: al origen medio de formación de conceptos, se convierten luego en medios de su simbolización.*

en el individuo, cuando este alcanza la *auto-regulación* de su comportamiento, y se caracterizan porque la estimulación es auto-generada. En esta, se crean y usan estímulos artificiales, creados y usados por los seres humanos, que se convierten en causas inmediatas de su comportamiento.

El segundo criterio de diferencia entre las funciones *elementales* y las *superiores*, es que estas últimas se realizan en forma voluntaria y consciente. Vygotsky la llama intelectualizada. Otra diferencia es el origen y naturaleza social de las funciones *superiores*. No es la naturaleza, sino la sociedad el factor determinante del comportamiento humano. Vygotsky estudió la interacción social en pequeños grupos o en diadas y su influencia interna sobre el individuo.

El último criterio de diferenciación es la *mediación*. Todos los factores anteriores, el control voluntario, la realización consciente y la naturaleza social, suponen la existencia de herramientas psicológicas o signos, que se usan para controlar el comportamiento propio y el de los otros. Los estímulos creados, junto con los ya dados, son los que definen las funciones psicológicas humanas.

Las funciones superiores se forman en la historia de la humanidad gracias a las herramientas mentales y sobre todo por los signos (cuya forma más universal es la palabra) que cada individuo interioriza sobre la base de su actividad práctica en actividades mentales cada vez más complejas.

### **II.2.3 Lo social y lo individual**

En la obra de Vygotsky, la dimensión social reviste una importancia central, pues se considera primera en tiempo y en los hechos respecto a la dimensión individual. Toda función mental superior se engendra por una actividad mediatizada y socialmente significativa. Quizás la formulación más sintética de esta idea es la llamada *ley genética general del desarrollo cultural* (Vygotsky, 1978):

*Every function in the child's cultural development appears twice: First, on the social level, and later, on the individual level; first, between people (inter-psychological), and then inside the child (intra-psychological). This applies equally to voluntary attention, to logical memory, and to the formation of concepts. All the higher functions originate as actual relations between human individuals... Social relations or relations among people genetically underlie all higher functions and their relationships (Vygotsky, 1978, 57).*

Todas las funciones superiores se originan con las relaciones humanas. El ejemplo relatado por el propio Vygotsky (1978) es el del desarrollo del gesto de un bebé, que al principio es una tentativa de agarrar un objeto deseado, el *gesto-en-sí*, que es un impulso natural. Cuando la madre se acerca, ese gesto se convierte en *gesto-para-otro*; la madre interpreta la tentativa como un gesto indicador, y lo que comenzó por un acto simple de agarrar, se convierte en un acto comunicativo socialmente significativo. El bebé comienza a dirigir el gesto a la madre y no al objeto deseado. Hay que subrayar que el bebé es el último que toma consciencia del significado real del gesto. El desarrollo no es por tanto la maduración de una idea preexistente, sino al contrario, es la formación de esta idea que no era ni siquiera una idea, a raíz de una actividad socialmente significativa. Así, en lo que concierne a una función que requiere un control consciente, deben empezarse y practicarse

inconscientemente en una interacción social antes que se pueda ver la aparición en el sujeto aislado a un nivel superior de desarrollo del control y de la consciencia, hipótesis que tiene grandes consecuencias didácticas. El aprendizaje con otros crea las condiciones en el niño para una serie de procesos de desarrollo que sólo se producen en la comunicación y la interacción. Para Vygotsky, la fuente de esta mediación puede estar tanto en el comportamiento de otro ser humano como en una herramienta material o en sistema de símbolos. Por eso en las teorías que toman en cuenta a los instrumentos de mediación semiótica se asigna gran importancia a la mediación de las computadoras y de la interacción con otros, especialmente el profesor. Se deben diseñar actividades para desarrollar un trabajo alrededor de los signos y herramientas en un contexto social. El carácter del signo es tratado por Radford (2000, 241), de la siguiente manera:

*Signs hence have a double life. On the one hand they function as tools allowing the individual to engage in cognitive praxis. On the other hand, they are part of those systems transcending the individual and through which a social reality is objectified. The sign-tools with which the individual thinks appear then as framed by social meanings and rules of use and provide the individual with social means of objectification.*

Refiriéndose a las matemáticas en particular, Radford (2000) considera el aprendizaje como la apropiación de una cierta forma de actuar y pensar, nueva y culturalmente específica, dialécticamente interconectada con la producción y utilización de signos, cuyo significado es adquirido por los estudiantes como resultado de su inmersión social en actividades matemáticas: “As we see it, knowledge appropriation is achieved through the tension

*between student's subjectivity and the social means of semiotic objectification" (Radford, 2000, 241).*

Dicha objetivación semiótica social se da a través de objetos, artefactos, palabras y signos, que en el caso del presente trabajo, involucra a los manipulativos virtuales ofrecidos en la computadora, a los signos matemáticos relacionados a la Derivada y a los lenguajes presentes en la experiencia de aprendizaje o de *internalización* de esos signos. Falcade (2006, 8), explica por su lado también el carácter de los signos:

*Autrement dit, d'une part, en agissant comme «outils psychologiques» ils sont capables d'affecter le fonctionnement cognitif; d'autre part, puisque ils vivent et appartiennent déjà à une culture, qui transcende l'individu-même, ils sont susceptibles d'objectiver d'une certaine façon la réalité et donc de médier la construction de signifiés socialement partagés, culturellement déjà existants.<sup>8</sup>*

De nuevo refiriéndose a la experiencia estudiada en esta tesis, vemos a los signos matemáticos como capaces de afectar el funcionamiento cognitivo de los estudiantes, y a la vez como objetivaciones de una cultura. Por eso el papel central del profesor, que es el mediador entre el individuo y la cultura matemática histórica y socialmente establecida. Él interviene en el paso de lo *inter-psicológico* a lo *intra-psicológico* creando un espacio intersubjetivo donde, como en el caso del gesto indicador de la madre y después del bebé, por una actividad socialmente significativa y de acuerdo a la comunidad de práctica de

---

<sup>8</sup> *Dicho de otro modo, actuando como "herramientas psicológicas", son capaces de afectar el funcionamiento cognitivo; por otro lado, puesto que viven y pertenecen ya a una cultura, que trasciende al individuo mismo, son susceptibles de objetivar de una cierta manera la realidad y por tanto de mediar la construcción de significados socialmente compartidos, culturalmente ya existentes.*

referencia, él obtiene la producción, maduración y transformación de signos-herramienta y herramientas psicológicas.

Para Vygotsky (1978), los dos conceptos que pueden explicar el modo por el cual tiene lugar el paso de lo inter-subjetivo a lo intra-subjetivo, son los mecanismos de *internalización* y la existencia de una *zona de desarrollo próximo*.

#### II.2.4 El proceso de *internalización* según Vygotsky

El mecanismo esencial presente en la interacción social que permite la formación de signos y que es el interés central de esta tesis, es el de *internalización* de las funciones cognitivas. Estas son primero activadas hacia el exterior y hacia otros individuos, y sucesivamente actúan hacia el interior del sujeto. Es un proceso en el que un cierto funcionamiento *inter-psicológico* se convierte en uno *intra-psicológico* transformando así su estructura y su funcionamiento. Vygotsky no es el único que habla de *internalización*; Piaget utiliza el término *interiorización* (en Falcade, 2006). Sin embargo hay una diferencia sustancial en lo que es internalizado; en Piaget es la acción del sujeto sobre el mundo físico lo que es internalizado en sus aspectos lógico y abstracto, y que se transforman en una *operación*. Para Vygotsky, lo que se internaliza es la interacción social y cultural del sujeto y el mundo. Esta comparación sirve para matizar el concepto de *internalización* usado por Vygotsky que, aunque no es de él, tiene elementos originales señalados por Kousulin y comentados en Falcade (2006, 9), particularmente en lo que toca a la conservación del carácter social de una función externa cuando esta ha sido ya internalizada:

*Le caractère social d'une fonction «externe» est préservé quand cette fonction a été internalisée. [...] Lors de l'internalisation d'une fonction supérieure, comme le*

*processus mnémorique basé sur des aides ou des supports externes, le processus naturel est remplacé par une typologie médiée d'activités de classification et stockage. [...] Le processus naturel ne disparaît pas mais il n'a plus une place centrale, il devient subordonné aux processus supérieur. [...] Les formes supérieures d'activité représentent un système fonctionnel, plutôt que une fonction seule, un système qui peut impliquer la pensée conceptuelle et l'analyse verbale.*<sup>9</sup>

En *Mind in Society*, Vygotsky (1978) describe el proceso de *internalización* como la reconstrucción interna de una operación externa. Consiste en una larga serie de transformaciones y de evoluciones por las que una operación que inicialmente representa una actividad externa es reconstruida y comienza a producirse internamente, y así un proceso inter-personal es transformado en uno intra-personal. La *internalización* también puede verse como la transformación del lenguaje comunicativo en habla interna y luego en pensamiento verbal (John-Steiner y Mahn, 1996). En ese proceso se enfocará esta tesis al momento de observar a los estudiantes que construirán el significado de objetos matemáticos que introducen a la Derivada.

*(a) An operation that initially represents an external activity is reconstructed and begins to occur internally. Of particular importance to the development of higher mental processes is the transformation of sign-using activity, the history and characteristics of which are illustrated by the development of practical intelligence, voluntary attention, and memory.*

---

<sup>9</sup> *El carácter social de una función externa se preserva cuando la función ha sido internalizada. [...] En la internalización de una función superior, como en el proceso mnemónico basado en ayudas o apoyos externos, el proceso natural es reemplazado por una tipología mediada de actividades de clasificación y almacenamiento. [...] El proceso natural no desaparece, pero no tiene ya un lugar central, se subordina a los procesos superiores. [...] Las formas superiores de actividad representan un sistema funcional más que una función sola, un sistema que implica el pensamiento conceptual y el análisis verbal.*



*(b) An interpersonal process is transformed into an intrapersonal one. [...]*

*(c) The transformation of an interpersonal process into an intrapersonal one is the result of a long series of developmental events. The process being transformed continues to exist and to change as an external form of activity for a long time before definitively turning inward. For many functions, the stage of external signs lasts forever, that is, it is their final stage of development. Other functions develop further and gradually become inner functions. However, they take on the character of inner processes only as a result of a prolonged development. Their transfer inward is linked with changes in the laws governing their activity; they are incorporated into a new system with its own laws (Vygotsky, 1978, 57).*

### **II.2.5 Zona de desarrollo próximo**

Es una idea en la que se refleja la prioridad de los procesos sociales sobre los individuales por la interacción de un sujeto con otros más competentes. La *zona de desarrollo próximo* es definida por Vygotsky (1978) de la siguiente manera:

*The distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers. (Vygotsky, 1978, 86).*

En el presente trabajo, la *zona de desarrollo próximo* es creada o provocada por la interacción del estudiante con los manipulativos virtuales, que comportan una guía de acción sobre un sistema de signos culturales, en este caso matemáticos. Esto implica que no

se trata de desarrollar las funciones psíquicas ya maduras, sino las que están en maduración, por lo que no sería necesario en teoría esperar que un niño alcance la madurez para enseñarle a leer o contar (lo cual no significa que se le pueda enseñar cualquier cosa). Esta noción de *zona de desarrollo próximo* tiene implicaciones importantes en la didáctica. Para Vygotsky, cuando un niño interactúa con adultos, es llevado a una zona de aprendizaje potencial donde se puede actuar más allá de su nivel de competencia actual. El profesor (o la computadora como en el caso de lo que se estudia en esta tesis) puede provocar interacciones con los estudiantes en esa zona donde el nivel se pueda elevar. Para que eso pueda producirse, es necesario negociar progresivamente un espacio intersubjetivo compartido, de manera que profesor y alumnos puedan encontrarse en un plano interpsicológico. El concepto de *zona de desarrollo próximo* ofrece una innovadora manera de valorar el desarrollo individual, que consiste no en lo que el individuo ha apropiado ya, sino en lo que puede potencialmente apropiar. Vygotsky lo dice así: “. . . *what children can do with the assistance of others might be in some sense even more indicative of their mental development than what they can do alone*” (Vygotsky, 1978, p. 85).

## II.2.6 El uso funcional de un signo como mediador semiótico

El lenguaje es la herramienta de mediación semiótica más importante en el paso del plano *inter* al *intra-psicológico*. Las relaciones sociales son internalizadas y transformadas en funciones psíquicas. Los niños usan el lenguaje primero en el plano *inter-subjetivo* porque este es usado por los adultos para dirigir las acciones del niño. Poco a poco este lenguaje es usado por el niño para dirigirse a otros y finalmente a él mismo. Sería la etapa llamada *lenguaje egocéntrico* o *lenguaje privado*, aquel que precede en el tiempo al *lenguaje interior* pero que tiene todavía una forma externa. Este *lenguaje egocéntrico* es

una forma de transición entre el lenguaje social y el lenguaje para uno mismo, y cumple una función auto-reguladora cuando se está en contextos potencialmente comunicativos.

La mediación semiótica ofrecida por el lenguaje está ligada primero a un contexto extra-lingüístico, por la supremacía de la función de señalar y de la separación del significado con el objeto (Pontecorvo en Falcade, 2006). La referencia común es la base para la construcción de un significado compartido. Por eso en lingüística se distingue por un lado el significado y por otro la referencia concreta a un objeto. Veamos un ejemplo de Vygotsky:

*Puede haber un solo significado y diversos objetos o al revés, los significados pueden ser distintos y uno solo el objeto. Si decimos “el triunfador de Jena” o el “derrotado en Waterloo”, nos referimos a la misma persona en ambos casos (Napoleón), aunque el significado de ambas expresiones sea distinto. (Vygotsky, 2001, 159).*

Aplicado esto al problema de la formación de conceptos en el ámbito escolar, encontramos que puede haber una palabra usada en común por estudiantes y profesor, pero cuyo significado puede no ser compartido entre ellos. Un caso conocido por los profesores de matemáticas es el del estudiante que puede decir la definición de Derivada o la de cualquier otro objeto matemático sin tener claro su significado funcional. De ahí la necesidad de articular los discursos de profesor y estudiantes. Los manipulativos virtuales presentan la ventaja de que el estudiante accede a los signos involucrados en un contexto de acción sobre los mismos, lo que permite *ver* funcionalmente su significado.

La cuestión del significado y la referencia al objeto es la llave de entrada al proceso de comunicación. Sin embargo, para Vygotsky (2001) la formación de un significado al cual está asociado un concepto, es un proceso mucho más complejo que tiene que ver con el uso funcional del *signo*. Para Vygotsky, en la formación de conceptos el *signo* es una palabra que sirve de medio de formación del concepto y se convierte después en su símbolo. Sólo el estudio del uso funcional de un *signo* y su aplicación pueden dar la clave para la formación de conceptos. El estudio experimental ha mostrado que el uso de la palabra o de un *signo* como medio de dirigir la atención, de diferenciar y de captar las características, de abstraer y de hacer una síntesis, es una parte fundamental de la formación de conceptos, proceso al cual tiende la acción de un sujeto con los manipulativos virtuales. Ésta es resultado de una actividad compleja donde participan todas las funciones intelectuales esenciales en una combinación específica. Vygotsky lo dice así:

*En relación con el problema del desarrollo de los conceptos, esto significa que ninguno de estos procesos, ni la acumulación de asociaciones, ni el desarrollo de la capacidad y de la estabilidad de la atención, ni la combinación de ideas, ni las tendencias determinantes, por muy desarrollado que esté, puede por separado llevar a la formación de conceptos. Por consiguiente, ninguno de estos procesos puede ser tomado como el factor evolutivo determinante, esencial y decisivo del desarrollo de los conceptos. [...]. El aspecto nuevo, esencial y central de todo este proceso, que puede ser considerado con fundamento la causa de la maduración de los conceptos, es el uso específico de la palabra, la utilización funcional del signo como medio de formación de conceptos (Vygotsky, 2001, 132).*

Es pues el uso funcional del signo (la palabra para Vygotsky, los signos matemáticos en el contexto de este trabajo) lo que permite tener poder sobre los propios procesos psíquicos para orientarlos a la solución de problemas. Vygotsky (2001) dice que el niño utiliza una palabra para comunicarse y organizar su propia actividad, antes de poseer su significado completo, mismo que no se desarrolla de manera independiente del que ya tiene en el contexto social, sino que, por el contrario, es dado al niño por su utilización en el discurso social e históricamente determinado.

Berger (2004), por su lado, da cuerpo al *uso funcional de los signos* en su trabajo con estudiantes pre-universitarios de un curso de Cálculo que se enfrentan con el tema de *integrales impropias*, mencionando acciones específicas que traducen dicho uso:

*I demonstrate 'functional use' of signs (manipulations, imitations, template-matching and associations) through an analysis of an interview in which a mathematics university student engages with a 'new' mathematical sign, the improper integral, using pedagogically designed tasks and a standard Calculus textbook as resources. (Berger, 2004, 81).*

En esta afirmación de Berger, queda claro que la acción con manipulativos virtuales relativos a objetos matemáticos, está en el horizonte del *uso funcional de los signos* que es causa de la maduración de los conceptos involucrados.

### **II.2.7 Significado y sentido, significado personal y significado cultural**

Vygotsky no define *signo* explícitamente. Al signo lingüístico lo diferencia de la señal en que el primero tiene significado y la otra sólo *señala*. Al momento cuando el niño

se pregunta por los nombres de las cosas y su vocabulario crece, es cuando el lenguaje se separa de todos los otros estímulos, adquiriendo la función de *signo*, con la atribución de un sentido y un significado, que para Vygotsky (2001) no es lo mismo. Una palabra del diccionario está limitada a un solo significado, mientras que el sentido es todo lo que la palabra desencadena en un sujeto como hechos psicológicos relacionados con ella. El significado es sólo la parte más estable del sentido. La palabra cambia de sentido según los contextos, el sentido es inagotable, mientras que el significado se queda inmovilizado. En teorías afines a la de Vygotsky, como la *teoría de mediación semiótica* (en Falcade, 2006), el significado (cultural) está ya formado por la consciencia social, ya está cristalizado, formado históricamente y es casi independiente del individuo. El significado expresa el sentido personal, pues este es creado por el individuo en el curso de su actividad, es subjetivo, mientras que el significado describe las propiedades de un concepto en el seno de un sistema cultural. Lo que hace un profesor en una interacción con sus alumnos es animarlos a expresar su sentido personal a través de su significado.

Esta distinción es consistente con la distinción entre *significado institucional* y *significado personal* que hace otro de los marcos teóricos que interviene en esta tesis, el *enfoque onto-semiótico de la didáctica de las matemáticas* (Godino, 2003), del que se habla más adelante. Se puede considerar que los significados personales son inaccesibles, pero se pueden comunicar a través de signos accesibles a los otros. Estos significados parciales contienen ya en germen el significado de la comunidad matemática o al menos el significado pretendido por la institución local.

Los significados tanto personales como culturales tiene algo de virtual, es decir, se les puede reconocer sólo a través de ciertas codificaciones aceptadas, idea congruente con

la de Raymond Duval (1999) acerca de que el significado de los objetos matemáticos depende de sus representaciones semióticas.

### **II.2.8 La mediación semiótica de las herramientas técnicas: artefactos e instrumentos**

Se ha dicho que las maneras que el profesor tiene de actuar en la *zona de desarrollo próximo* de sus estudiantes, pasa por actividades didácticas socialmente significativas donde se usan signos y herramientas. La diferencia entre ellos es su función, internamente orientada en los signos, y externamente en las herramientas, y que la transformación de herramienta a signo se hace a través del proceso de *internalización*. Se analizará entonces el rol de las herramientas en el proceso de mediación semiótica.

Pierre Rabardel (1999), retomando el trabajo de Vygotsky, desarrolló la llamada *teoría instrumental extendida*, en la que se hace la distinción entre *artefacto* e *instrumento* y se propone la noción de *génesis instrumental*, también trabajada por Vérillon y Andreucci (2005).

Estas nociones permiten extender el concepto de herramienta de dos maneras diferentes, que en Vygotsky es más o menos neutra, y entonces captar el diferente estatus que pueden tener para el usuario. Para Rabardel (1999), un *artefacto* es el objeto material o simbólico en sí mismo que ha sido construido según conocimientos específicos y que tiene ciertos objetivos, como por ejemplo un brazo manipulador de un robot que mueve objetos en el espacio, o bien los manipulativos virtuales usados en esta tesis. El *instrumento* sería una entidad mixta que comprende al artefacto por una parte, y por otra los esquemas sociales para su utilización, que en esta investigación serían los significados matemáticos cultural e históricamente formados. El *instrumento* es entonces una construcción hecha por

el sujeto y tiene un carácter psicológico, individual y a menudo contextualizado, aunque está influido socialmente por la interacción social con los otros. Los esquemas de utilización tienen una dimensión privada en el sentido de que pertenece a un individuo; pero tiene también una dimensión social esencial, pues se trata de un proceso colectivo donde intervienen los usuarios, pero también los constructores del artefacto.

A los procesos que acompañan la elaboración y la evolución de los *instrumentos* y de los esquemas del sujeto, Rabardel los llama *génesis instrumental* (Rabardel, 1999; Trouche, 2005). Para estos autores esta génesis consta en realidad de dos procesos:

- *L'instrumentalisation concerne l'émergence et l'évolution des composantes-artefact de l'instrument: sélection, regroupement, production et institution de fonctions, transformation de l'artefact (structure, fonctionnement...) qui prolongent la conception initiale des artefacts ;*
- *L'instrumentation est relative à l'émergence et à l'évolution des schèmes d'utilisation: leur constitution, leur fonctionnement, leur évolution ainsi que l'assimilation d'artefacts nouveaux à des schèmes déjà constitués, etc.*  
(Rabardel, 1999, 9).<sup>10</sup>

Las génesis instrumentales incluyen los aspectos estructural y funcional y del propio sujeto, o sea, los objetos y las formas de la actividad, y organizadores como las representaciones y esquemas. Las génesis instrumentales entonces están dirigidas hacia el artefacto y hacia el

---

<sup>10</sup> La instrumentalización concierne a la emergencia y la evolución de los componentes-artefacto del instrumento: selección, reagrupamiento, producción e institución de funciones, transformación del artefacto (estructura, funcionamiento...) que prolongan la concepción inicial de los artefactos;

• La instrumentación es relativa a la emergencia y evolución de los esquemas de utilización: su constitución, su funcionamiento, su evolución así como la asimilación de los nuevos artefactos a los esquemas ya constituidos, etc.



sujeto. *Instrumentación e instrumentalización* son las dos fases indisolubles de dicha génesis.

Los esquemas de utilización no responden obligadamente al objetivo pragmático o cultural que el constructor o diseñador del artefacto quería. Más bien están ligados a la experiencia personal y pueden cambiar. En el caso de los manipulativos virtuales utilizados en la investigación de esta tesis, este aspecto es paliado por el hecho de que los manipulativos tienen una intención definida y orientada hacia un concepto en particular, y que además el rol del profesor asegura que el estudiante no se aleje del objetivo previsto. Rabardel (1999), como sostiene Vygotsky, dice que el uso de artefactos en la actividad cognitiva no es neutro, sino que implica reorganizaciones importantes en el sujeto. El ejemplo que pone el mismo Rabardel (1999) es claro: dos grupos de estudiantes que manipulan sendos robots diferentes para desplazar objetos, hacen representaciones también diferentes del espacio tridimensional.

Pero la incidencia de los instrumentos en la actividad cognitiva es más compleja todavía y va más allá de la simple relación sujeto-artefacto o de hacerse de esquemas de utilización, sino que el *instrumento* puede ser conscientemente usado para fines didácticos socialmente significativos, y convertirse en un verdadero mediador semiótico de los significados implicados en él, como los matemáticos en particular. La explicitación de significados matemáticos y su *internalización* es parte de una red de relaciones didácticas *profesor-contenidos-artefacto-alumnos-objetivos* dirigida por el profesor. Esta intervención del miembro más experimentado es característica de la *teoría de la mediación semiótica*, o TMS, tal como lo explica Falcade (2006, 23) en relación al papel del profesor como

organizador del encuentro entre el *artefacto* y los procesos de *internalización* que es central en esta tesis doctoral:

*Cependant l'émergence et l'évolution de ces signifiés, ainsi que l'explicitation de leur statut mathématique, font appel à beaucoup d'autres éléments, en particulier à la prise en compte d'une organisation didactique des interactions «élèves/artefact», de la part de l'enseignant. La TMS en particulier vise à prendre en compte cet autrui plus expérimenté ou qui cherche à transmettre un savoir, qui organise la rencontre avec l'artefact et le processus d'internalisation<sup>11</sup>.*

### II.2.9 Diferencia entre Instrumentos e Instrumentos de mediación semiótica

La *internalización* para Vygotsky transforma una herramienta técnica (externamente orientada) en una herramienta psicológica (internamente orientada), tal como lo señala Mariotti (2002, 14): *“The process of internalization as described by Vygotsky may transform tools into psychological tools: when internally oriented a « psychological tool » will shape new meanings; in this sense a tool may function as a semiotic mediator ».*

Esto se complementa diciendo que en esa transformación, la herramienta técnica conserva algunos de sus rasgos, pero los signos (las herramientas psicológicas) adquieren una autonomía que se utiliza en actividades diferentes a las que tenía originalmente. Se convierten entonces en verdaderas formas de pensar y pueden contribuir a la construcción de significados matemáticos, es decir, que constituyen una mediación semiótica.

---

<sup>11</sup> Sin embargo la emergencia y evolución de esos significados, así como la explicitación de su estatus matemático, se apoyan en muchos otros elementos, en particular a la toma en cuenta de una organización didáctica de las interacciones alumno-artefacto de parte del maestro. La TMS en particular apunta a tomar en cuenta ese otro más experimentado que busca transmitir un saber, que organiza el encuentro con el artefacto y el proceso de internalización.

Recordemos el ejemplo ya citado de Vygotsky sobre el sistema de numeración y de Mariotti sobre el compás.

Mariotti (2002) sin embargo nos recuerda que el proceso de mediación semiótica no debe identificarse con los procesos de *instrumentación* e *instrumentalización* que son sólo una componente de aquel:

*The artefact, although incorporating a mathematical knowledge, although integrated by appropriate utilisation schemes, did not function in generating mathematical meanings; through its use, the user did not access that meaning which was incorporated in the artefact. This is a very common phenomenon; the process of construction of meanings is not directly and simply related to practice (Mariotti, 2002, 12).*

La *génesis instrumental* no puede llenar por sí sola el desfase entre dominar la computadora (donde hay conocimiento matemático incluido) y el hacerse de los verdaderos significados matemáticos. Estos no se alcanzan por la sola práctica en un instrumento, y es necesaria la intervención de un sujeto más capaz para llevar al aprendiz hasta el significado pretendido. Por eso hay una diferencia entre instrumento e instrumento de mediación semiótica: el *artefacto* se convierte en *instrumento* por la *génesis instrumental*, pero si el *instrumento*, que está entre el profesor y los estudiantes, se usa como medio de comunicación entre los significados de ambos, entonces puede convertirse en un *instrumento de mediación semiótica*.

El uso de la computadora funciona de diferentes maneras en la actividad didáctica: para adquirir los esquemas de utilización, que pueden hacer brotar algunos significados,

pero que no garantiza que estos sean los significados matemáticos de referencia. En cambio, si la computadora sirve para comunicar estrategias que desarrollen el significado matemático, estaría funcionando semióticamente bajo la guía del profesor. Se puede decir que ambos usos son complementarios.

El artefacto es explotado en dos dimensiones (Mariotti, 2002): el estudiante lo utiliza para alcanzar un objetivo (el de una tarea) y un cierto significado; y el profesor lo usa para dirigir el significado hacia el significado matemático aceptado de referencia, pero esto sucede sólo por una dinámica social guiada por el profesor. Sin su intervención no habría una verdadera mediación semiótica. El profesor hace que la representación, las palabras y signos que obtiene el estudiante del uso del instrumento, evolucionen hacia los signos institucionales. Es el uso de estos signos lo que hace que el saber o el significado cultural puede internalizarse en el estudiante. Este rol del profesor difiere de otras posturas en las que el profesor debe irse desvaneciendo.

De aquí se desprende una de las hipótesis fundantes de la *teoría de la mediación semiótica* de Mariotti y Bartolini Bussi, de la que se ha tomado uno de los supuestos en la presente tesis doctoral:

*Meanings are rooted in the phenomenological experience (actions of the user and feedback of the environment, of which the artefact is a component) but their evolution is achieved by means of social construction in the classroom, under the guidance of the teacher (Mariotti, 2002, 16).*

### **II.2.10 Conceptos científicos y conceptos cotidianos**

Para Vygotsky (2001) la formación de los conceptos cotidianos y de los científicos es parte del mismo desarrollo verbal semántico. Como en el caso de una palabra, el significado en una etapa primera está lejos de estar acabado, y evoluciona por un acto complejo de la mente. Los dos tipos de conceptos no se desarrollan de la misma forma, pero el proceso no es muy lejano. El símil es con el aprendizaje de una lengua nueva y la lengua materna. El concepto científico, siendo mediatizado por herramientas psicológicas o signos, se apoya en un concepto cotidiano del que modifica su estructura. Difieren en varios aspectos, entre ellos en la relación que tienen con los objetos: un concepto cotidiano surge de un hecho empírico concreto, y uno científico de una explicación o una definición de un profesor o un texto, que evoluciona hasta la generalización (Vygotsky, 2001). Además, ambos tipos de conceptos tiene puntos fuertes y débiles distintos:

*La debilidad de los conceptos cotidianos se manifiesta, según los datos de nuestra investigación, en la incapacidad para la abstracción, en el modo arbitrario de operar con ellos; en semejante situación, domina su utilización incorrecta. La debilidad del concepto científico estriba en su verbalismo, en su insuficiente saturación de lo concreto, que se manifiesta como el principal peligro de su desarrollo; la parte fuerte, es la capacidad para utilizar voluntariamente la “disposición a actuar” (Vygotsky, 2001, 183).*

Los manipulativos virtuales utilizados en la experiencia estudiada en esta tesis conllevan la idea de la saturación en concreto de un concepto científico a través de la multitud de ejemplos de la aplicación del concepto incluidos en aquellos. En efecto, se tiene un ejemplo cada vez que se accione voluntariamente el manipulativo.

Los dos tipos de conceptos difieren en el tipo de mediación que ofrecen: si en los cotidianos la relación de mediación es con objetos, en los científicos es con una red de otros conceptos ya formados. El desarrollo de los conceptos científicos equivale a una generalización que incluye otros conceptos subordinados así como su jerarquización. Otra forma en la que difieren es en la presencia o ausencia de un sistema organizado (por supuesto el último caso corresponde a los científicos). Pero la diferencia mayor tiene que ver con el carácter *consciente y voluntario* con el que se utilizan los conceptos científicos, característica que debe explotar el profesor proponiendo tareas que desarrollen este carácter.

Falcade (2006) adapta estas ideas de Vygotsky al plano de la enseñanza de matemáticas con artefactos, y entonces el papel de los conceptos cotidianos lo asimila a la experiencia sensible con el artefacto, y el de los científicos al funcionamiento teórico de los alumnos, para el que el aporte del profesor es indispensable. Vygotsky (2001) habla de un proceso de *germinación* de ambos tipos de concepto, que convergen a una zona común. Los cotidianos *germinan* hacia los científicos y viceversa. Esto es lo que intentan hacer los manipulativos virtuales en la utilización de la computadora que quiere conectar las nociones cotidianas con las científicas de los objetos matemáticos que introducen a la Derivada. La toma de consciencia necesaria viene justamente con la desadaptación entre los dos tipos de concepto, y se complementa con el paso de la acción al lenguaje, a la formulación particularmente en lenguaje escrito, que es más abstracto, y finalmente a la acción mental, tal como se verá más adelante.

Con todo esto se subraya la importancia de lo necesario pero insuficiente del desequilibrio en los procesos de aprendizaje, y la necesidad de trabajar explícitamente en la

toma de consciencia con un diseño muy cuidadoso de las actividades de los estudiantes, y en esta tesis, de los manipulativos virtuales.

El trabajo de investigación sobre conceptos cotidianos y científicos, ha sido retomado ampliamente por discípulos rusos de Vygotsky (comentado en Karpov y Bransford, 1995) como Vasili Davydov, quien los expresa como conceptos *empíricos* y *teóricos*; o como N. S. Pantina, quien realizó en 1957 un experimento donde comparó los resultados de instrucción para escribir letras del alfabeto ruso a niños de seis años. En ese experimento, a un grupo se mostró y explicó un patrón para trazar cada letra, seguido de la práctica de los niños, lo que constituye una instrucción de tipo *empírico*; al segundo grupo se le dio la tarea de analizar los lugares en los que cambiaba de dirección el trazo de una letra, y de colocar puntos en ellos, para reproducir ese patrón de puntos en otro lugar de la página; es decir, que al segundo grupo se le dio la oportunidad de descubrir el modelo de los trazos en una tarea de tipo *teórico*. Como lo explican Karpov y Bransford, 1995, 63):

*The guidance in the first group was aimed at students' mastery of concrete writing skills. The guidance in the second group was aimed at the students' acquisition of the scientific concept of a contour and the mastery of the processes underlying this concept.*

La comparación del número de intentos de los niños para trazar todas las letras del alfabeto ruso mostró una dramática diferencia a favor en la eficiencia del segundo grupo.

La idea subyacente al experimento de Pantina, que será retomado en detalle más adelante, refuerza una de las ideas básicas de esta tesis, relativa a la decisión de plantear

tareas –en los manipulativos virtuales- que conlleven trabajo *teórico* para los estudiantes investigados.

### **II.2.11 La teoría de formación de conceptos de Vygotsky aplicada a las Matemáticas**

La teoría de formación de conceptos de Vygotsky (2001) es un marco adecuado para estudiar el uso idiosincrático de los signos por estudiantes en matemáticas, cuando se introduce un nuevo objeto en forma radical a través de su definición (Berger, 2004). La teoría vygotskiana del pensamiento *pre-conceptual* y *pseudo-conceptual* es un puente entre el conocimiento individual y social para construir conceptos significativos personales y culturales a través del uso funcional de los signos.

La formación de conceptos matemáticos ha sido estudiada, entre muchos otros, por Dubinsky (Dubinsky y McDonald, 2001) desde las ideas de Piaget, estableciendo unas etapas por las que el estudiante se mueve desde la transformación de acciones interiorizadas como procesos, que son posteriormente *encapsulados* como objetos. Procesos y objetos se organizan en esquemas, y de ahí el nombre de la teoría *APOE* (Acción-Proceso-Objeto-Esquema). Según Berger (2006), este proceso no se corresponde con la realidad de su trabajo en aula:

*But much of this process-object theory does not resonate with what I see in my (university) mathematics classroom. For example, it does not help me explain or describe what is happening when a learner fumbles around with ‘new’ mathematical signs making what appear to be arbitrary connections between these new signs and other apparently unrelated signs. Similarly, it does not explain how these incoherent-seeming activities can lead to usages of mathematical signs that*



*are acceptable to professional members of the mathematical world and personally meaningful to the learner* (Berger, 2006, 15).

APOE está basada en acciones interiorizadas de un individuo descontextualizado, sin tomar en cuenta el rol crucial del lenguaje y la regulación social y la construcción social del conocimiento matemático mediado por el lenguaje, los signos y las herramientas. Por eso la importancia de las nociones vygotskianas de *pre* y *pseudo-concepto* (Vygotsky, 2001) para explicar cómo un individuo construye un nuevo concepto matemático.

### **II.2.12 Las funciones mentales superiores como productos de actividad mediada**

Vygotsky (2001) ve las *funciones mentales superiores* como productos de actividad mediada. El rol de mediador lo juegan las herramientas psicológicas o signos, como las palabras, las gráficas, los símbolos algebraicos o las herramientas técnicas materiales. La acción mediada por signos es el enlace entre el mundo externo social y el proceso interno humano. En lo que toca a esta dualidad en la formación de conceptos, Berger (2006, 16) dice que *[...] concept formation [...] is only possible because the word or mathematical object can be expressed and communicated via a word or sign whose meaning is already established in the social world*. Y complementa Radford (2000) afirmando que: *in mathematics, the same mathematical signs mediate two processes: the development of a mathematical concept in the individual and that individual's interaction with the already codified and socially sanctioned mathematical world*. El conocimiento matemático se forma, pues, cognitiva y socialmente.

El rol dual de un signo matemático antes de que tenga su significado total, no es atendido en general en educación. Las manipulaciones (como las que se harán en esta

investigación), las asociaciones e imitaciones no son en general utilizadas por los educadores matemáticos. Dos ejemplos de esto, citados en Berger (2006), son el movimiento de Reforma del Cálculo en Estados Unidos, que disocia las habilidades de los conocimientos, y la teoría *APOE*, cuyos textos no contemplan el uso de plantillas o patrones de problemas, y donde no le dan importancia a la imitación como recurso de aprendizaje.

La teoría de Vygotsky, que usa los signos como una parte necesaria (aunque no suficiente) en la formación de conceptos, provee un enlace entre ciertas actividades matemáticas a veces despreciadas u olvidadas por los educadores, y la formación de conceptos.

### **II.2.13 Etapas pre-conceptuales de la formación de conceptos**

Vygotsky (2001) elaboró su teoría detallando varias etapas previas al concepto o pre-conceptuales, a saber: la etapa de *apilamiento de nociones*, el pensamiento por *complejos* y los *conceptos potenciales*. Estas formas de pensamiento son retenidas por los adultos y usadas según su interpretación de una tarea y de la estrategia elegida para resolverla. De ahí se explica que los estudiantes universitarios de matemáticas usen esos *pre-conceptos* en forma persistente cuando se enfrentan a nuevas ideas. Este movimiento de retroceso no es lineal, sino que puede ir y regresar por las diferentes etapas.

En la etapa pre-conceptual de *apilamiento* (Vygotsky, 2001), el niño agrupa objetos e ideas que no tienen una relación objetiva. Este *apilamiento* tiene lugar de acuerdo a las circunstancias y a la impresión subjetiva en la mente del niño. En la etapa de pensamiento por *complejos*, la actividad del aprendiz es aún un tanto inconsciente, como lo puede ser

seguir una plantilla, hacer asociaciones, manipulaciones e imitaciones que se manifiestan por un uso idiosincrático de los signos, aunque el uso adecuado de los signos no es equivalente a entender cabalmente su significado. Como ejemplo de pensamiento en la etapa de *complejos* basada en asociaciones en estudiantes universitarios de Cálculo Diferencial, está el siguiente tomado de Berger (2006, 17):

*On first encountering the derivative,  $f'(x)$ , of a function  $f(x)$ , many learners associate the properties of  $f'(x)$  with the properties of  $f(x)$ . Accordingly, these learners assume that since  $f(x)$  is continuous, so is  $f'(x)$ . Clearly this is not logical; indeed it is mathematically incorrect.*

Otro ejemplo de comportamiento en la etapa de *complejos*, en la modalidad de seguir una plantilla, es el proporcionado por Sfard y comentado en Berger (2006):

*si la plantilla es  $\frac{a}{a} = 1$ , entonces debería ser cierto  $\frac{0}{0} = 1$ , que es obviamente incorrecto, aunque con el mismo mecanismo  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$  es correcto.*

El punto no es *cómo* los estudiantes usan los signos, sino más bien, que efectivamente los usen, y que por ese uso, construyan su significado y sean capaces de comunicarlo. Gracias a la comunicación con otros sujetos más expertos, se permite desarrollar el significado de formas cada vez más congruentes con el significado institucional de la comunidad matemática. Las observaciones de Berger (2006) sobre sus estudiantes a través de los años, confirman su idea de que las etapas *pre-conceptuales* son indispensables en la construcción del concepto.

Respecto a los *conceptos potenciales*, Vygotsky (2001) argumenta que el pensamiento por *complejos* o grupos crea las bases para poder hacer generalizaciones futuras en las que el sujeto clasifica objetos en categorías sobre la base de sus características. Por lo tanto el sujeto se involucra en abstracciones en el propio momento en que está en etapa de pensamiento por *complejos*. Vygotsky llama al resultado de agrupar objetos en base a un atributo o a un conjunto de ellos, un *concepto potencial*. Las abstracciones son inherentes a la construcción de cualquier objeto matemático, y por eso los *conceptos potenciales* abundan en matemáticas. Pero la abstracción de atributos está tan profundamente ligada a la formación de *complejos* en el pensamiento matemático avanzado, que es imposible distinguir *conceptos potenciales* de *complejos* matemáticos. Por esa razón, Berger (2006) sugiere que el *concepto potencial* no es una categoría de análisis útil, particularmente en matemáticas avanzadas.

#### **II.2.14 El pseudo-concepto: puente entre lo individual y lo social**

Para Vygotsky (2001) en el pensamiento *conceptual*, los lazos entre las propiedades y aspectos de un concepto y entre un concepto y otros conceptos, es lógica, y las ideas forman parte de un sistema de conocimiento jerárquico culturalmente reconocido y consistente. Eso difiere del pensamiento por *complejos*, que es predominantemente no-lógico. La transición entre *complejos* y *conceptos*, según Vygotsky (2001), es por medio de los *pseudo-conceptos*. Estos últimos tienen una naturaleza doble: por un lado se asemejan a los conceptos, pero el tipo de pensamiento detrás de los *pseudo-conceptos* tiene características de los *complejos*. Esto es, con el pensamiento por *complejos*, el estudiante aún usa asociaciones, plantillas e imitaciones y puede tener aspectos contradictorios sobre el concepto. Pero lo que es importante es que el aprendiz es capaz de usar los *pseudo-*

*conceptos* en la comunicación y en actividades *como si* tuviera el verdadero concepto. Los *pseudo-conceptos* son muy fáciles de usar en matemáticas en los casos en que el estudiante aún no ha construido completamente el concepto. Un ejemplo es justamente el de la Derivada, que puede ser manipulada incluso cuantitativamente en forma mecánica por un estudiante aunque este no conozca todas sus propiedades y aplicaciones. Vygotsky (2001) dice que el uso de *pseudo-conceptos* permite al aprendiz a comunicarse efectivamente con los adultos, y que son necesarios para la transformación de *complejos* en genuinos conceptos.

La comunicación verbal es un factor poderoso en el desarrollo de los conceptos de un niño. La transición entre el pensamiento por *complejos* y el pensamiento por conceptos pasa inadvertida para el niño porque sus *pseudo-conceptos* ya coinciden en contenido con los conceptos adultos. Así, los *pseudo-conceptos* funcionan como puente entre conceptos cuyo significado está más o menos fijado y constante en el mundo social, y la necesidad del aprendiz de construir esos conceptos de tal forma que lleguen a ser un significado personal. Son también un puente entre lo individual y lo social. Más aún, la noción de *pseudo-concepto* es enteramente consistente con la del uso funcional del signo. Puede ser usada para explicar cómo un estudiante es capaz de usar signos matemáticos (en algoritmos, definiciones, teoremas, solución de problemas) en formas efectivas en el lenguaje de la comunidad matemática aunque el estudiante no comprenda a cabalidad el concepto. Lo esperable es que a través del uso apropiado del *pseudo-concepto*, este se transforme en *concepto*.

### **II.2.15 Estructura del proceso de mediación semiótica**

De acuerdo a Valsiner (2001), la idea de que el lenguaje guía la mente humana, o bien de que los procesos psicológicos humanos tienen un origen social, está presente desde el comienzo de la Psicología en el siglo XIX, y se ha mantenido hasta nuestros días a través del trabajo de personajes como Wilhelm von Humboldt, Moritz Lazarus, Charles Sanders Peirce, Franz Brentano, Ferdinand de Saussure, Henri Bergson, Ernst Cassirer y Lev Vygotsky entre otros.

La naturaleza de la mente humana es guiada por signos, entre ellos los del lenguaje, que enlazan a la persona con el mundo y que regulan su comportamiento. Los signos emergen en la comunicación humana y van sufriendo alteraciones en las que se van diferenciando e integrando jerárquicamente (Valsiner, 2001). Por su uso continuo en la comunicación, los signos siguen un proceso soterrado de abreviación en el que van desapareciendo parcial o totalmente sus manifestaciones externas, mientras se van decantando en el nivel intra-psicológico en una forma abstracta y generalizada. En esto los signos actúan como una reserva semiótica para necesidades futuras de regulación semiótica (regulación del comportamiento mediado por signos).

Los signos operan psicológicamente sólo en el mundo intra-psicológico humano, pues son subjetivamente construidos y abreviados, aunque se consolidan inter-psicológicamente (Valsiner, 2001). Por su rol principal, que es representar algún aspecto de la experiencia, los signos adquieren flexibilidad a través de su proceso de abstracción y generalización, y a la vez llegan a una relativa estabilidad capturando características generales de la experiencia por parte de la persona. A través de esa relativa estabilidad, los seres humanos pueden conectar su pasado y presente con el futuro inmediato en construcción.

### II.2.16 Hetero y auto-regulación con signos

Cada palabra que una persona dice a otra es una hetero-regulación, y es también un acto de auto-regulación, aun cuando el mensaje comunicativo emitido no es exactamente isomorfo con el que porta el signo en sí mismo. Sólo el emisor puede asumir la posición subjetiva del mensaje en relación al proceso comunicativo (Valsiner, 2001). Los signos necesariamente difieren un tanto de lo que significan para permitir a la persona trascender la experiencia del aquí y ahora, pues el signo tiene la función de ir hacia adelante, de preparar una acción futura, de regular y dirigir esa acción, no la de describir el momento presente. Esta inconsistencia entre el comportamiento externo y la reflexión interna sobre el mismo, es una esperable y normal función del signo. El proceso de mediación semiótica crea una diferencia entre el dominio psicológico interpersonal y el interpersonal. La diferencia entre los lados interno y externo de las funciones psicológicas es la norma, y la total consistencia entre ellos es la excepción, si bien esta dicotomía externo-interno será cuestionada por discípulos de Vygotsky como Leontiev y Galperin, discusión que se presentará más adelante.

Los mensajes emitidos por una persona están orientados por el rol asumido por ella. La misma persona en un rol puede diferir de sí misma cuando está en otro rol. Consideremos el ejemplo dado por Valsiner: si alguien emite el mensaje *mira, esto es X*, según un rol de profesor quizá quiera decir: *y ustedes deberían aprenderlo*; en un rol de miembro de un grupo de turistas significaría *¿no es hermoso?*; y en un rol de esposa podría significar *deberías sentirte culpable por no haberme llevado allí de luna de miel*. En cada uso del signo en auto y hetero-regulación, dicho signo aparece simultáneamente con una multitud de funciones. En términos de la mediación semiótica amplia, cualquier otro

artefacto semiótico liga el pasado, el presente y el futuro; codifica los sentimientos de la persona en el aquí y ahora, y aún distingue las posibilidades inmediatas y las potenciales. Por ejemplo, una persona que tiene de repente una idea, puede decirse internamente *qué ridícula idea*, y en la comunicación externa lanzar alguna otra expresión o exclamación.

En forma consecuente, habría tres formas de presentación de una declaración: *re-presentación*, *co-presentación* y *pre-presentación*, enfocadas en el pasado, presente y futuro. Por ejemplo (Valsiner, 2001), en la declaración *este niño es ciego*, se porta simultáneamente un mensaje sobre el pasado del niño (la ceguera de alguna manera ya ha ocurrido, *re-presentación*); sobre el presente (aquí y ahora hay un niño que no puede ver, *co-presentación*); y sobre las imposibilidades futuras (incapacidad de ver), posibilidades (el niño puede experimentar el mundo a través de los otros sistemas sensorios), y posibilidades potenciales (la ceguera se podría superar con una prótesis visual). El uso de esta declaración por alguien puede incluir las tres formas o alguna de ellas.

El signo, y por tanto la mediación semiótica, tiene un papel aparentemente contradictorio, pues por un lado los humanos están creando todo el tiempo un futuro inmediato a través de la construcción y uso de signos en el presente, pero al ser este transitorio, la mediación de los signos no es por lo tanto permanente (Valsiner, 2001). Pero precisamente a través de la mediación con uso transitorio de signos, la persona crea una continuidad de sentido del mundo, siendo en este caso permanente. Los signos particulares pueden llegar e irse, pero el sentido construido por ellos (que viene siendo un meta-signo), permanece en un estado estable. Vygotsky expresó esta idea en su distinción entre *sentido* y *significado* de una palabra, asunto tratado en otra parte del marco teórico de esta tesis: el primero es la totalidad de eventos psicológicos despertados por la palabra en la consciencia;



el *significado* es solo una parte del *sentido*, un ladrillo en el edificio del sentido, el que adquiere en un contexto determinado. El *sentido* de una palabra es cambiante, mientras que el significado se queda fijo, como en la definición de un diccionario, en todos los contextos aunque el *sentido* cambie. El *sentido* de la palabra está en la base del análisis semántico del discurso.

La constante construcción de *significado* que hace la persona, garantiza temporalmente el estado estable de las palabras. En un diccionario el *significado* parece estable, hasta que su uso en un nuevo contexto hace que cambie su *sentido* en una suerte de estabilidad dinámica.

En forma consecuente con lo anterior, los signos permiten la flexibilidad en la psicología humana, pero a la vez fijan un modo de pensar o sentir sobre alguna cosa en particular. Son así dialécticamente estables e inestables.

El desarrollo *ontogenético* humano, es decir, aquel que abarca el periodo de vida de un hombre, conlleva la construcción y uso de signos que regulan las funciones psicológicas inter e intra-psicológicas (Valsiner, 2001). Estas últimas son mecanismos regulatorios jerárquicos de generabilidad creciente, lo que implica también que haya una abstracción creciente de los signos y de sus referentes. La abstracción del signo presente se relaciona con los signos previamente usados o creados, conllevando la formación de un nuevo todo (*Gestalt*) donde las partes son reunificadas. La generalización subjetiva permite unir experiencias diferentes del pasado con las nuevas. A través del uso de signos, los humanos pueden trascender cualquier actividad situada en el aquí y el ahora a través de la construcción subjetiva de significados personales.

La generabilidad de un signo es la propiedad de crear una reflexión abstracta sobre el contexto inicial. Para que esto suceda, el signo se separa del contexto donde surgió y se hace transferible a nuevos contextos. El signo generalizado asume una existencia autónoma tanto a nivel intra como inter-psicológico (si es que hay comunicación), que sirve para regular tanto el contexto o evento que lo creó, como a los nuevos contextos donde se use.

Pero el signo no puede transferirse directamente de un contexto a otro; primero debe distanciarse del contexto original. Los signos autónomos o encapsulados se mantienen en el tiempo a nivel intra e inter-psicológico, y están listos para usarse cuando lo requiera un nuevo contexto. El conjunto de signos autónomos sirven como reserva que la persona tiene cuando encuentre nuevas situaciones de vida.

Los signos operan sobre otros signos, y de esta manera se regulan unos a otros permitiendo la creación de sistemas semióticos flexibles de regulación. Esto genera un sistema jerárquico de reguladores: si el *Signo 1* regula un proceso, puede subsumirse en otro sistema de regulación donde un *Signo 2* regula al *Signo 1* y al proceso. El *Signo n* puede regular al *Signo (n-1)*, a todos los signos anteriores y al proceso.

Dice Valsiner (Valsiner, 2001) que la conducta está sobre-determinada por el significado. El conjunto de signos involucrados en la regulación de un proceso puede tener un orden jerárquico temporal; pero a la vez, la mediación semiótica es redundante: diferentes signos organizados pueden regular el mismo proceso de una u otra manera. La sobre-determinación semiótica es flexible, en momentos es mejorada, y en otros limitada a un nivel particular de signos. También puede estar bloqueada del todo, como en los casos de acciones automatizadas que están libres de toda regulación semiótica.

El sistema semiótico regulatorio es siempre incremental y siempre va hacia una mayor *generalidad*. Hay un crecimiento constante en la jerarquía que regula el flujo de los procesos psicológicos más inferiores. Consideremos el ejemplo de una persona que está sintiendo algo que no ubica claramente, o sea, que tenemos un fenómeno de nivel afectivo (un signo de nivel 0); lo único que sabe es que el sentimiento se está enfocando poco a poco; entonces en algún momento la persona se da cuenta de que está enojada (crea un signo de nivel 1). En el momento en que reconoce que está enojada, el nivel afectivo es reubicado y forma ya parte del sistema del enojo que es más amplio como para albergar a otros sentimientos bajo el signo del enojo. Si después siente vergüenza (signo de nivel 2) por estar enojado, la persona creó un sistema jerárquico de signos: estoy avergonzado (nivel 2) por estar enojado (nivel 1) lo cual detecto a través de ese sentimiento (nivel 0).

En muchas situaciones humanas, la jerarquía puede seguir hasta llegar a un nivel donde ya no haya una palabra que lo designe. Esto puede pasar a nivel intra e inter-psicológico, y representa el mayor nivel de mediación semiótica de los procesos psicológicos. La persona ha sobre-generalizado los signos, entiende sin necesidad de hablar, a la manera en que se hace en el Yoga.

### **II.2.17 Generalización abstracta y especificación contextual**

En la jerarquización regulatoria dinámica de que se habla arriba, que constituye en sí la mediación semiótica, intervienen dos procesos. La *generalización abstracta* genera nuevos niveles de reguladores semióticos que se mueven hacia una mayor complejidad de abstracción, superando los roles de *re-co-pre* presentación de enunciados ya mencionados. Por ejemplo, valores como la libertad y la justicia, tienen sentido en su abstracción

generalizada. Pero luego estas abstracciones se pueden aplicar a contextos muy específicos a través de un proceso que Valsiner (Valsiner, 2001) llama *especificación contextual*, en la que aunque no se alcanza la entera especificación de la forma abstracta, de todos modos las abstracciones dan un marco de sentido al entendimiento que tenga una persona sobre la experiencia en curso.

En suma, el desarrollo humano se organiza por una *semiosis flexible*, en la que el rol de la mediación semiótica no se prueba con el hecho de que dos personas compartan el mismo significado intra-personal, sino en la construcción de entendimientos subjetivos únicos sobre la base de mensajes comunicados socialmente.

#### **II.2.18 Dominios genéticos en el trabajo de Vygotsky**

La mayor parte del trabajo de Vygotsky sobre las funciones psicológicas *elementales y superiores*, tuvo lugar estudiando la historia del comportamiento humano en la escala temporal de la vida de un hombre, lo que se llama el *dominio ontogenético*. Sin embargo, él mismo señala junto con su discípulo Luria (en Wertsch, 1988), que el desarrollo del comportamiento sólo puede ser entendido y explicado científicamente considerando las líneas evolutiva, histórica y *ontogenética*, es decir, a la escala temporal del desarrollo de la especie, o *filogénesis*, a la escala temporal del desarrollo de la cultura en que está inmerso un hombre, o *historia histórico-cultural*, y a la escala temporal propiamente *ontogenética*. Wertsch (1988) propone el nombre de otra línea en el análisis temporal trabajado efectivamente por Vygotsky, aunque no fue designada por este: la escala *microgenética*, que se enfoca en el estudio de la formación de funciones psicológicas superiores en periodos muy cortos de tiempo, y que es la que interesa en esta investigación.

En el terreno de la *filogénesis*, Vygotsky basó su trabajo en la comparación entre los simios superiores y el hombre, apoyándose en investigaciones previas como las que Kohler desarrolló estudiando la actividad mediada por herramientas en chimpancés y gorilas. A propósito de esto, Vygotsky criticó que el conductismo no diferenciara cualitativamente los comportamientos de niños y de animales, fijándose únicamente en hábitos de conducta de ambos, a los que consideró una condición necesaria pero no suficiente para estudiar el comportamiento humano. Es la actividad en el trabajo, con lo que implica en el uso de herramientas psicológicas o signos, la condición para el desarrollo del funcionamiento psicológico específicamente humano. Por lo tanto Vygotsky concluye, con Engels, que el trabajo crea al hombre. La posición *filogenética* de Vygotsky, en la que el desarrollo orgánico es condicionante para otros tipos de desarrollos, cesa cuando aparece la cultura, sin solapamiento de ambas, ha sido en cierta forma refutada por descubrimientos posteriores a la vida de este autor (en Wertsch, 1988). Hay evidencias actuales de que el desarrollo orgánico es parcialmente influido por presiones histórico-culturales. Pero este hecho no pone en tela de juicio las ideas *filogenéticas* de Vygotsky.

El desarrollo *histórico-cultural* de la humanidad no coincide con el desarrollo biológico. El primero tiene que ver con la actividad social, en la que el hombre aprende de los errores y éxitos de las generaciones pasadas, a diferencia de los animales que tienen que aprender todo por sí mismos en cada generación. Las leyes evolutivas, como la de la selección natural, no pueden aplicarse a los fenómenos sociales humanos. El análisis de Vygotsky sobre la historia histórico-cultural, pone atención al papel del habla y del lenguaje en las transformaciones cualitativas del desarrollo mental. Este autor introduce una distinción dentro de las funciones psicológicas superiores que es importante para

analizar la historia histórico-cultural, dividiendo esas funciones superiores en *rudimentarias* y *avanzadas*, que difieren sólo en grado y guardan una relación genética de la primera a la segunda. Las funciones mentales superiores se distinguen porque incluyen la habilidad de independizar los signos del contexto de donde surgieron, es decir, de descontextualizar y luego re-contextualizar estos signos para usarlos como herramientas en una acción futura. Estas habilidades caracterizan al desarrollo histórico de la cultura, tal como lo demostró el experimento que Vygotsky y su discípulo y colega Luria llevaron a cabo en el Asia central soviética con individuos analfabetos (en Wertsch, 1988).

Es en la escala de la *ontogénesis*, el estudio del desarrollo individual, en la que Vygotsky y sus colaboradores trabajaron fecundamente en forma empírica, por ser la escala en la que puede verse el fenómeno en su totalidad, a diferencia de los niveles *filogenético* e *histórico-cultural*. La *ontogénesis* en Vygotsky no puede considerarse en aislado de los otros niveles, pero tampoco verse como una adaptación de esos niveles al *ontogénético*, pues Vygotsky insiste en que se trata de tipos de desarrollo distintos. Para él, el desarrollo de las funciones superiores dentro de la *ontogénesis* involucra la relación de dos líneas de desarrollo. Una de ellas es llamada *natural* y tiene lugar bajo cambios orgánicos. La otra es llamada *cultural* y está superpuesta al proceso de crecimiento, maduración y al desarrollo orgánico, aunque actúan en forma conjunta o unitaria en el individuo. Estas líneas están en relación con las funciones psicológicas elementales y superiores respectivamente. Con esta distinción, Vygotsky supera el reduccionismo que consiste en explicar la totalidad del funcionamiento cognitivo exclusivamente sobre bases biológicas o exclusivamente sobre bases histórico-culturales, y amplía las miras para incluir la interacción de ambos aspectos. De hecho, para este autor, el desarrollo biológico es una condición necesaria pero no

suficiente del desarrollo histórico-cultural. Se ha cuestionado, a la luz de descubrimientos posteriores a Vygotsky, su idea de que las líneas *natural* y *cultural* están inicialmente separadas y más tarde integradas en la vida del niño. Otra crítica, señalada en Wertsch (1988), se refiere a la superficialidad con que Vygotsky aborda el desarrollo natural, ya que su interés siempre estuvo en la influencia de los factores histórico-culturales en el desarrollo individual, enfatizando una de las dos direcciones posibles de la relación de las líneas natural y cultural. Pero de nuevo, estas críticas no menoscaban la aportación original de este autor.

Wertsch (1988) denominó *microgénesis* a otro dominio genético importante en el pensamiento vygotskiano, además de la *filogénesis*, la *historia cultural* y la *ontogénesis*, dominio que se asocia usualmente a procedimientos experimentales en Psicología. Estos experimentos son de dos tipos: por un lado están los experimentos enfocados en la formación a corto plazo de un proceso psicológico específico, y consisten en observar los intentos de los individuos para llevar a cabo una tarea. Dice Vygotsky (1978) que si se ignora esta forma de transición genética, los estudios sobre el aprendizaje y el desarrollo pierden una muy interesante fuente de datos. El otro tipo de experimentos tiene que ver con captar un acto individual perceptivo o conceptual que puede durar sólo un instante, como en la explicación del tránsito entre el pensamiento y el habla. El primero de estos tipos de estudios *microgenéticos*, será clave en la parte metodológica de esta investigación.

Las líneas de desarrollo *natural* y *cultural* comentadas en la parte de la *ontogénesis*, pueden, según Vygotsky (en Wertsch y Penuel, 1995), examinarse en forma integrada en el dominio *microgenético*, que es útil para observar procesos de desarrollo en el curso de una o dos sesiones de entrenamiento. El movimiento en escenarios *microgenéticos* se da desde

la asistencia de un sujeto más capaz a uno menos capaz, hasta el funcionamiento independiente de este. Es decir, que tal movimiento constituye la transición entre el desarrollo inter-mental y el proceso intra-mental.

La investigación del desarrollo de las funciones psicológicas superiores puede abordarse con el *método genético* de Vygotsky, sustentado en los siguientes principios básicos: 1. Los procesos psicológicos humanos se estudian examinando sus orígenes y la evolución que tienen hasta su estado final; 2. La formación de los procesos psicológicos implica tanto cambios revolucionarios como evolutivos; 3. La progresión de los cambios está en términos de herramientas y signos; 4. Si se quiere tener un estudio completo de la mente humana, deben considerarse varios dominios genéticos (*filogénesis, historia cultural, ontogénesis, microgénesis*); 5. Cada dominio genético opera con sus propios principios explicativos.

### **II.2.19 Aprendizaje y desarrollo en la teoría de Vygotsky**

Lev Vygotsky (1978) señala que los problemas encontrados en el análisis psicológico de la enseñanza no pueden resolverse sin tener claridad teórica en la relación entre aprendizaje y desarrollo. Si este tema es soslayado en una investigación, esta estaría fundada sobre premisas potencialmente erróneas.

Existen tres posturas usuales en torno a la relación desarrollo-aprendizaje. La primera sostiene que el desarrollo es independiente del aprendizaje, siendo este último una actividad puramente externa que no juega un papel en el desarrollo. Esto está basado en asumir que los procesos de deducción, de entendimiento del mundo, de causalidad física y el dominio de formas lógicas, se dan por sí mismas, sin influencia del aprendizaje escolar.



Esta es la postura de Piaget, Binet y otros, en la que el desarrollo es siempre un prerrequisito del aprendizaje.

La segunda postura sostiene que desarrollo es aprendizaje, y entonces la lectura, la escritura y los procesos aritméticos son vistos como el dominio de reflejos condicionados; o sea, el proceso de aprendizaje está inseparablemente unido al proceso de desarrollo. Es la postura pragmática de William James y de Charles S. Peirce, quienes reducen el proceso de aprendizaje a la formación de hábitos, y afirman que la educación no puede ser mejor descrita que como la organización de los hábitos de conducta y las tendencias del comportamiento. El desarrollo sería la acumulación de las posibles respuestas. La diferencia principal de las dos posturas tiene que ver con lo temporal: en la primera los ciclos de desarrollo preceden a los ciclos de aprendizaje, y en la segunda ambos procesos son simultáneos.

La tercera postura, representada por Koffka, es la mezcla de las dos anteriores, desarrollo y aprendizaje son procesos que se influyen mutuamente; por un lado dependen de la maduración del sistema nervioso y por otro, el aprendizaje es visto como un proceso de desarrollo y por tanto, este es algo más grande que el sólo aprendizaje.

Las ideas de Vygotsky se alejan de las tres posturas, y comienza señalando que el aprendizaje de un niño comienza antes de que este llegue a la escuela. Cuando el niño estudia aritmética ya tiene experiencia con las ideas de cantidad y tamaño y con la suma, la división y la sustracción, y esto no puede ignorarse. Aprendizaje y desarrollo están ciertamente interrelacionados, pero el aprendizaje pre-escuela no es de la misma naturaleza que el escolar. No sólo difieren en el grado de sistematicidad en el que se dan, sino en un

elemento antes inadvertido en las posturas mencionadas (Vygotsky, 1978), el concepto de *zona de desarrollo próximo*, sin el cual no se puede estudiar esta relación.

Es bien conocido que el aprendizaje debe estar de algún modo emparejado con el desarrollo, y entonces la lectura y la aritmética deben esperar a una cierta edad del aprendiz. Pero Vygotsky considera necesario no limitarse a esa relación desarrollo-aprendizaje, e introduce un segundo nivel de desarrollo a considerar. Mientras que el primero se puede llamar desarrollo *actual*, obtenido al término de un ciclo de desarrollo y medido por la capacidad actual para completar ciertas tareas, existiría otro nivel de desarrollo en el que el sujeto es capaz de ejecutar tareas adicionales con la ayuda de personas más capaces que él. Vygotsky opina que este segundo nivel es más indicativo del desarrollo mental que el alcanzado por el sujeto aislado. A la diferencia entre el nivel de desarrollo *actual* mostrado por un sujeto, y el alcanzado con la ayuda de otros, Vygotsky la llama *zona de desarrollo próximo* (Vygotsky, 1978), analizada más arriba. En el nivel *actual*, se muestran las funciones mentales ya maduras, y en el *próximo*, las funciones que están aún madurando o formándose, vistas de una manera prospectiva. El estado del desarrollo mental de un aprendiz se puede entonces clarificar considerando los dos niveles.

La adquisición del lenguaje puede ilustrar la relación desarrollo-aprendizaje. El lenguaje surge inicialmente como un medio para comunicar al niño con las personas presentes en su ambiente. Luego, con la conversión de este lenguaje en habla interna, esta se vuelve un organizador del pensamiento del niño y una función mental. Piaget y otros han mostrado que el razonamiento ocurre en un grupo de niños como un argumento comunicativo dirigido a probar a los otros el propio punto de vista antes de ser una actividad interna. Así, el habla interna, el pensamiento reflexivo y el comportamiento

voluntario surgen de las interacciones del niño con personas de su ambiente.

Investigaciones previas a Vygotsky habían mostrado que el niño primero subordina su comportamiento a las reglas del grupo mientras juega con otros, y sólo después surge el comportamiento auto-regulatorio como función interna. Estos ejemplos muestran una ley general de las *funciones mentales superiores* que puede aplicarse a todo el proceso de aprendizaje. Para Vygotsky, una característica esencial del aprendizaje es que este crea la *zona de desarrollo próximo*, es decir, que despierta una variedad de procesos de desarrollo que operan cuando el niño interactúa con otras personas y coopera con sus pares. Cuando este proceso es *internalizado*, forma parte del desarrollo independiente. Desde este punto de vista, aprendizaje no es desarrollo, pero un aprendizaje organizado genera desarrollo mental y moviliza una serie de procesos que no se dan apartados del aprendizaje. Por eso, el aprendizaje es un aspecto necesario y universal del proceso culturalmente organizado de desarrollo de las funciones mentales superiores específicamente humanas.

En resumen, lo más importante en la hipótesis de Vygotsky es que el proceso de desarrollo no coincide con el proceso de aprendizaje; más bien, el proceso de aprendizaje impulsa al proceso de desarrollo, secuencia de la que resultan las *zonas de desarrollo próximo*.

Esto va a contracorriente con la postura en la que se acepta que un niño ha completado su proceso de desarrollo cuando ha asimilado el significado de una palabra, una operación aritmética o el lenguaje escrito. De hecho, esto no hace sino comenzar el desarrollo. Por ejemplo, el dominio de las cuatro operaciones aritméticas pone la base para el subsecuente desarrollo de varias funciones superiores. La hipótesis vygotskiana establece

la unidad pero no la identidad de desarrollo y aprendizaje. Presupone que una se convierte en la otra, y muestra cómo los conocimientos y habilidades externos se internalizan.

Un objetivo del análisis psicológico del desarrollo es describir las relaciones internas del proceso intelectual con el aprendizaje escolar, lo que debería mostrar al profesor lo que sucede dentro de la cabeza de sus estudiantes. La revelación de este desarrollo subterráneo o interno es una tarea de primera importancia para la investigación de la psicología educativa. Otra característica esencial de la hipótesis es que aunque desarrollo y aprendizaje están directamente relacionados, nunca suceden en paralelo o en igual medida, o usando la imagen de Vygotsky, la relación no sucede como una sombra que sigue a su objeto, sino que guardan una compleja relación dinámica. Cada contenido escolar se relaciona en forma distinta con el proceso de desarrollo, y es la investigación sobre la *zona de desarrollo próximo* la que deberá dilucidar este problema.

Por su lado, Labarrere-Sarduy (2000) considera que ver al desarrollo sólo como el residuo de la actividad del alumno en la apropiación de los instrumentos culturales para resolver cierto tipo de problema y sus procesos simbólicos, es una limitación. En efecto, el desarrollo es convencionalmente estimado a través de la capacidad emergente en el sujeto para resolver independientemente lo que antes resolvía con la ayuda de otros sujetos más capaces; también se estima a través de los procesos de transferencia, entre más lejana mejor, que lleva a cabo el sujeto en el ámbito del tipo de problema tratado y que traducen una reestructuración de su proceso cognitivo.

Lo que Labarrere-Sarduy ve como limitación es la centración excesiva en el problema que, aunque necesaria, es sólo un medio o un argumento para el desarrollo pero

no nos conduce directamente al desarrollo mismo. Este último debería incluir, además de la adquisición de medios culturales para resolver independientemente un tipo de problema, también la producción del propio desarrollo y el de los demás, es decir, debe llevarse a cabo una actividad consciente y específica de auto-ayuda, auto-andamiaje y auto-asistencia. Esto sólo lo podrá hacer el sujeto si conoce en forma consciente y explícita los procesos de desarrollo en los que se ve inmerso y si lo hace tomando el control y la responsabilidad de los mismos.

### **II.2.20 Vigencia de Vygotsky en el siglo XXI**

Lev Vygotsky ha sido llamado el Mozart de la psicología por ser el autor de una de las teorías más prometedoras de esa disciplina. A más de 70 años de su muerte en 1934, y después de un silencio de 20 años dentro de la URSS y de la gradual publicación de su obra en el resto del mundo, se ha convertido hoy en un autor de vanguardia. En la opinión de uno de sus mejores intérpretes, como lo es A. Rivière (en Ivic, 1999), Vygotsky se adelantó considerablemente a nuestra época en más de un aspecto.

Considérese los poderosos auxiliares externos a los procesos psicológicos de que actualmente disponemos (instrumentos, artefactos, tecnologías), que conforman lo que Ivic llama tecnología psicológica, y sus potenciales efectos en el hombre de hoy. Nos podemos preguntar si es posible estudiar hoy los procesos mentales superiores de un hombre moderno sin tomar en cuenta a estos mediadores, dado que gracias a su existencia disponemos de una memoria y de una inteligencia ampliadas exteriores y artificiales (Ivic, 1999). Sabemos hoy que la presencia de estos instrumentos mediadores tecnológicos modifica los procesos interiores de las personas, y por eso la investigación debe abocarse al

análisis de las reestructuraciones provocadas por la interacción de los aspectos exterior y exterior de esos procesos. La teoría vygotskiana es el instrumento ideal para estudiar el fenómeno de la mediación de herramientas materiales y psicológicas en el desarrollo psicológico, justo en un contexto como el actual caracterizado por la irrupción de tecnologías aplicadas a la comunicación, la información y la educación.

La célebre tesis vygotskiana sobre la transformación de los fenómenos inter-psíquicos en fenómenos intra-psíquicos, tiene un valor heurístico que dista mucho de estar agotado en la actualidad a opinión de Ivic, idea que esta tesis comparte. De aquí que se justifique, en pleno siglo XXI, que se emprenda la investigación de un escenario de actividad que aborda una modalidad educativa de interacción hombre-computadora aplicando para su análisis la teoría histórico-cultural iniciada por Vygotsky y continuada por otros como Leontiev y Galperin.

### **II.2.21 Aplicación de las ideas de Vygotsky en sujetos adolescentes y adultos**

Lev Vygotsky ha señalado en *Mind in Society* (1978), que la inteligencia práctica y el uso de signos pueden actuar en forma independiente en niños pequeños, pero que la verdadera esencia del complejo comportamiento adulto, es la unidad dialéctica de ambos sistemas, cuya función organizativa y simbólica produce nuevas formas de comportamiento y constituye la base material del pensamiento. La afirmación de la independencia de ambas funciones en los niños ha resultado un tanto polémica a la luz de investigación posterior a Vygotsky sobre las habilidades de los niños.

Pero en *Pensamiento y Lenguaje*, Vygotsky (2001) dice que la función primaria de las palabras tanto en niños como en adultos, es la comunicación o el contacto social, y

también que las funciones intelectuales y lingüísticas no pueden ser igualadas, y más bien hay que pensarlos como dos conjuntos que se intersectan en lo que llamamos pensamiento verbal, que no incluye ni todas las formas de pensamiento ni todas las formas de lenguaje.

Como lo muestra la investigación reciente (en Subbotsky, 1998), un poco a contrapelo de algunas ideas vygotskianas, los niños pueden hacer inferencias y entender en forma similar a los adultos, y sus funciones no son *cualitativamente* distintas a las de aquellos. Una diferencia está en el horizonte de aplicación de la habilidad cognitiva: los niños lo hacen en un número limitado de casos, mientras que el adulto puede generalizar la regla a un gran número de eventos físicos observables. En otras palabras, el desarrollo de la habilidad cognitiva se interpreta como una perfección cuantitativa de la capacidad infantil adquirida o heredada más que como una serie de cambios cualitativos. Los niños pueden enfocar los problemas como lo hacen los adultos, y usan palabras para comunicarse con ellos y con los otros niños en una forma parecida a lo que hacen los adultos con los conceptos, sólo que se trata de pseudo-conceptos que tiene que pasar aún por un proceso de maduración. Esta maduración tiene que ver con el uso significativo de la palabra y de otros signos, que es la causa psicológica inmediata y el medio para la formación de los conceptos, cambio radical en el proceso intelectual que solo se da según Vygotsky (2001) en el umbral de la adolescencia, aunque hoy se opina (Subbotsky, 1998) que en esa edad no aparece ninguna nueva función elemental que sea totalmente diferente de las ya presentes desde la infancia, sino que las funciones se conforman en una nueva estructura o síntesis. Las leyes de la nueva estructura o el nuevo todo determinan el destino de cada componente.

Aún así, las extraordinarias capacidades de los niños descubiertas por la investigación reciente, aunque complejas, no dejan de ser funciones inferiores que tienen que pasar por el camino del desarrollo, es decir, deben convertirse en funciones mediadas semióticamente, controladas voluntariamente, y unidas sistémicamente con otras funciones, como ingeniosamente lo estableció Vygotsky (Subbotsky, 1998).

Desde el punto de vista de Galperin, a primera vista pareciera que sólo en las primeras etapas escolares o del currículum, para los niños es indispensable la acción material con objetos como condición de su aprendizaje y desarrollo. Sin embargo, los estudios de Talysina, Ausubel y Salmina (en Haenen, 2001 y en Arieovich y Haenen, 2005) señalan que cuando los adultos enfrentan el aprendizaje de un objeto completamente nuevo para ellos, requieren al menos de materialización parcial como el que puede proporcionar los gráficos de orientación que usa Galperin.

Por todo lo anterior se fundamenta la pertinencia del escenario de actividad de esta tesis, en el que el sujeto de investigación, Erick, pasa por etapas explícitas de acción material sobre los manipulativos virtuales como necesarias para internalizar los objetos matemáticos y sus relaciones para poder manejarlas posteriormente en un plano idealizado o mental, que no requiere ya de la presencia de los objetos mismos sino de sus imágenes psíquicas. Se ha dicho también que los manipulativos presentan la oportunidad de observar y operar el uso funcional de los signos involucrados, que es el factor más importante para su conceptualización y para su reorganización vertical en una nueva estructura más compleja que dirige finalmente el comportamiento del sujeto en relación a los objetos matemáticos pretendidos.



### II.3 Énfasis en la *actividad humana* en la teoría histórico-cultural. La aportación de Leontiev.

#### II.3.1 Introducción

Como señala Zinchenko (Zinchenko, 1997), cualquier intento de explicar la escuela *histórico-cultural* (o *histórico-cultural*) en la psicología rusa, pasa por considerar su relación con la *teoría de la actividad*, una de las ramas más importantes desprendidas del trabajo de Vygotsky. Uno de sus creadores, Alexei Nikolaievich Leontiev trabajó al lado de Vygotsky y de Aleksander Romanovich Luria contribuyendo a la teoría *histórico-cultural* demostrando experimentalmente las ideas de Vygotsky. Después fundó su propia escuela basada en la *teoría psicológica de la actividad*, en parte debido a un mayor apego a la ideología marxista soviética que la que parecía demostrar Vygotsky, lo que le valió a este último la prohibición de ciertas de sus obras por el régimen soviético. Sin embargo la obra de Vygotsky mismo es considerada precursora de la *teoría de la actividad*.

Según Zinchenko (1997), no puede hablarse de dos escuelas, sino de dos tendencias de investigación producidas por los mismos académicos. En efecto, ambas teorías comparten raíces histórico-culturales profundas, pero mientras una centra su interés en el fenómeno de la mediación semiótica de la psique y la conciencia, la otra enfatiza su *orientación al objeto* tanto en la actividad externa como interna. La psicología *histórico-cultural* analiza el papel mediador de los signos, palabras, símbolos y mitos, y su interés estaba en la conciencia y en las funciones psicológicas superiores; esta postura provocó la crítica del régimen soviético en el que trabajó Vygotsky y fue calificada de idealista y, por

esto, alejada del marxismo. Pero la *teoría de la actividad* tuvo también otras fuentes, como la aportada por Sergei Rubinstein, quien trajo a la psicología las ideas filosóficas de actividad.

La *teoría de la actividad* arguye que los procesos psicológicos tienen una naturaleza de actividad objetual (Zinchenko, 1997). El concepto de acción, y no el significado como en Vygotsky, se constituye como objeto de investigación y como unidad de análisis de los procesos psicológicos. Sin embargo la acción como unidad cumple con todos los requisitos planteados por Vygotsky. En la *teoría de la actividad* se ha demostrado que tanto los motivos como las necesidades se orientan al objeto, lo cual también acarreó críticas en lo que concierne a la ausencia, en la acción vista de ese modo, de asuntos ligados a la espiritualidad humana. En efecto, en el esquema de actividad de Leontiev (*actividad-acción-operación*, ligados a *motivos-objetivos-condiciones*), no son aparentes el sentido, el significado, los mediadores, la consciencia ni la personalidad. Sin embargo, dados sus antecedentes histórico-culturales, sí lo están en el cuerpo de su teoría. El sentido, por citar un ejemplo, se encontraba en la relación del motivo y el objetivo.

La psicología *histórico-cultural* (o *histórico-cultural*) se interesa en el problema de los mediadores ideales (instrumentos psicológicos para Vygotsky) entre los seres humanos y el mundo y entre seres humanos distintos.

La *teoría psicológica de la actividad* se interesa por su lado en el problema de las herramientas y objetos reales concretos que los seres humanos colocan entre ellos mismos y la naturaleza. El debate está en qué hace humanos a los humanos, ¿el símbolo o la cosa? (Zinchenko, 1997). Si es el símbolo hablamos de idealismo (de lo que se acusó a Vygotsky

en la Rusia soviética), y si es la cosa de materialismo (al que quiso servir Leontiev). No es clara la discusión ulterior en lo que toca a la conversión de la cosa en símbolo, o que las cosas asumen propiedades de los símbolos que posibilitan su *internalización*. Quizá habría que buscar esa respuesta en otros campos teóricos, como pudiera ser la semiótica de Charles S. Peirce.

Según Zinchenko, la postura más inteligente no es tomar una de las dos posturas como la principal o la correcta, sino en pensar que ambas se enriquecen mutuamente. Una postura intermedia sólo se debatiría en forma estéril entre *lo interno* y *lo externo*. A este propósito, Gillespie y Zittoun (2009) señalan que no hay necesidad de resolver el persistente debate teórico sobre los usos de signos o de herramientas. Una postura más amplia y comprehensiva considera el empleo tanto de signos como de herramientas.

Al desarrollar ideas marxistas acerca del rol del trabajo en la socialización humana, Leontiev argumentó que la acción práctica con herramientas promueven la formación de la consciencia humana (Koshmanova, 2007). Su declaración más importante es que el mecanismo que desarrolla la consciencia humana es la interiorización de acciones prácticas externas, que se transforman en internas precisamente en la actividad individual práctica con herramientas (libros, manuales, clases profesoriales, contenidos de aprendizaje, medios didácticos). Pero las acciones prácticas externas, como dice Otte (2001), no pueden existir sin objetos, aunque esos objetos pertenezcan a alguna realidad virtual. Esto será importante al considerar a los objetos matemáticos, que pertenecen a una realidad no corpórea basada en representaciones semióticas (Duval, 1999). Los manipulativos virtuales que incluyen ideas matemáticas serían un ejemplo de herramienta sobre la cual ejercer la acción humana para desarrollar la consciencia.

Hasta hoy hay disputa acerca de si Leontiev desarrolló su teoría sobre las ideas de Vygotsky o no. Según Piotr Y. Galperin, Vygotsky habló de la interacción de la consciencia y las emociones con la actividad práctica, pero no investigó sobre los elementos estructurales de la actividad ni las herramientas prácticas de su proceso. Otros dicen que injustamente se acredita a Vygotsky la creación de la *teoría de la actividad* cuando este ni siquiera la mencionó en sus obras ni consideró la interacción sensorial práctica necesaria en el desarrollo del habla y los signos. Y aún otros opinan que las ideas y la investigación de Vygotsky abonaron el camino para la *teoría de la actividad*. Para Koshmanova (2007), la actividad humana en Vygotsky es sólo un principio explicativo, mientras que para Leontiev es justamente el objeto de investigación.

### II.3.2 Elementos estructurales de la *teoría de la actividad* de Leontiev

Reconocida la importancia de la actividad humana en el desarrollo del pensamiento, analizaremos algunos elementos de la teoría que alrededor de la *actividad* hizo A. N. Leontiev. Lo que caracteriza a esta teoría es que en ella se identifican tres niveles de actividad diferentes, interconectados y complementarios, cuyas unidades de análisis son la *actividad*, la *acción* y la *operación*.

La *actividad* responde a una necesidad de los sujetos, y tiene por tanto un *motivo* material o psicológico que es la causa de su conducta, y es lo que diferencia a una actividad de otra. El *motivo* tiene un carácter social, y como dice Wertsch (1988), es un aspecto históricamente específico e institucionalmente definido, aunque conlleva un aspecto individual. Puede decirse con Wertsch que el *motivo* de la actividad es la fuerza directriz e integradora que tienen las suposiciones implícitas en un contexto situacional social

históricamente específico e institucionalmente definido. En efecto, las suposiciones implícitas de la *actividad* sobre los roles, objetivos y medios adecuados a ella, determinan la *acciones* y las *operaciones* que la conforman y su significado funcional o sentido. Por ejemplo, consideremos dos actividades como el trabajo y la escuela, que tienen *motivos* distintos, la productividad y el aprendizaje. Estos *motivos* indican a qué cosa se le debe dar la máxima importancia y qué debe sacrificarse en el caso de que coexistan varios *motivos* en cada *actividad*. La noción de contexto situacional de actividad y su motivo proporciona un medio para relacionar los fenómenos de tipo social institucional con los fenómenos psicológicos individuales (Wertsch, 1988, 223).

El carácter social del *motivo* supera dos conflictos de la Psicología: el reduccionismo individual-social, y el dualismo mente-cuerpo (Cubero, 2000). El primero esclarece el funcionamiento individual proyectado en la sociedad, pues el sujeto hace uso de signos elaborados por la cultura aún en las interacciones cara a cara. El segundo conflicto es la dicotomía de los procesos internos y externos, del pensamiento y el mundo exterior, en la que la tradición consiste en estudiarlos por separado, mientras que en el enfoque *histórico-cultural* se contemplan conectados justamente por la *actividad*. El concepto de *actividad* en Leontiev incluye los aspectos internos y los externos de la actividad humana, e incluso considera el funcionamiento mental mismo como una *actividad*.

Otra característica de la *actividad*, señalada por Kuutii más arriba, es que es mediada por el uso de instrumentos, tal como se sustenta en la fuente filosófica del enfoque *histórico-cultural* que es, como se ha dicho, el pensamiento de Marx y Engels extendido a la Psicología por Vygotsky, quien a su vez extendió el alcance de los instrumentos no sólo

a los materiales sino también a los psicológicos o signos (palabras, números y otros). Las palabras son los signos más conceptuales y más independientes del contexto que median en la actividad psicológica y tienen, como se ha dicho en el *marco teórico* de esta tesis, un origen social y cultural y luego se convierten en instrumentos para regular el propio comportamiento. Por estas razones Vygotsky adoptó como unidad de análisis el significado de la palabra, adopción que ha sido criticada y trascendida entre otros por Wertsch<sup>12</sup> (1988).

El segundo nivel de análisis en la *teoría de la actividad* de Leontiev corresponde a la *acción* individual orientada hacia un objetivo. Una *actividad* produce *acciones* y se concreta a través de ellas, pero la actividad no es la suma de acciones, pues estas desaparecen cuando no son ya necesarias. Una *acción* puede contribuir a la realización de actividades diferentes, es decir, es independiente de la *actividad*. Lo contrario también es cierto: el mismo *motivo* puede dar lugar a objetivos diferentes, es decir, producir *acciones* diferentes. Leontiev, Zinchenko y Wertsch (en Wertsch, 1997) proponen como unidad idónea de análisis del funcionamiento psicológico en el enfoque *histórico-cultural* a la *acción dirigida a un objetivo y mediada por instrumentos*. En esa *acción* se implican y coordinan funciones mentales como la percepción, la memoria, el pensamiento (o solución

---

<sup>12</sup> *El significado de la palabra, tomada como unidad de análisis, era para Vygotsky un microcosmos investigable o una célula psicológica que refleja la complejidad de la organización inter-funcional dinámica de la consciencia. En una analogía con la química, si se quiere analizar por qué el agua apaga el fuego, se toma en cuenta la unidad que forman el hidrógeno y el oxígeno y no los elementos por separado. Pero esta noción de Vygotsky no toma en cuenta hechos como que las palabras cambian de significado según los distintos contextos, ni explica la relación entre las funciones psicológicas naturales (de las que casi no dice nada) y el significado de la palabra. Tampoco explica la relación entre las fuerzas naturales y las sociales del desarrollo. Estas limitaciones hicieron que se pensara en otra unidad de análisis de los fenómenos del desarrollo de la consciencia.*

de problemas) y la atención, y no son consideradas en aislado. Esta unidad proporciona un microcosmos manejable para estudiar la consciencia humana.

El tercer nivel de análisis es la *operación*, que tiene que ver con las condiciones concretas bajo las que se lleva a cabo una *acción*. La *acción* orientada a un objetivo generalizable se materializa en un contexto espacio-temporal concreto a través de las *operaciones*. Un objetivo puede alcanzarse bajo condiciones diferentes, es decir, que las operaciones son independientes de la acción.

La *actividad* se realiza a través de las *acciones*; las *acciones* a su vez, se concretan a través de *operaciones*. Lo que diferencia a la *acción* de la *operación*, es que la primera requiere la participación consciente de los actores, y la segunda es simplemente una rutina.

La *actividad* y la *acción*, y no ya el significado de la palabra, son las unidades fundamentales de análisis en el enfoque *histórico-cultural* (Wertsch, 1988). La *actividad*, como se ha dicho, es un escenario social definido institucionalmente, que incluye las suposiciones de los participantes acerca de los roles, metas y medios adecuados a dicho escenario. Lo que caracteriza a un *escenario de actividad* no es el espacio físico en que se encuentran los participantes, ni siquiera lo que otros esperarían que hicieran en él. La *actividad* sólo existe en la medida que es realizada, *actuada* por los participantes (De la Mata, 1998).

Las *acciones* corresponden a un nivel de análisis diferente al de las *actividades*. Como se dijo, mientras que las *actividades* se definen por su motivo, las *acciones* se definen por su objetivo. Así, la noción de *actividad* nos permite dar cuenta de los fenómenos de carácter institucional, mientras que la *acción* puede ser usada como unidad

de análisis del funcionamiento psicológico del sujeto (De la Mata, 1998). Esta distinción está de algún modo conectada con la existente entre el *significado institucional* y el *significado personal* dentro de la teoría *onto-semiótica de la didáctica de las matemáticas* (D'Amore y Godino, 2007), teoría que forma parte del *marco teórico* de esta investigación. Sin embargo, el propio A. N. Leontiev enfatiza el carácter no aditivo y molar de la *actividad*, siendo un sistema con su propia estructura, sus propias transiciones, transformaciones y desarrollo incorporados en su red de relaciones sociales. En consecuencia, lo único a lo que puede llamarse unidad es a la propia *actividad*. Las *acciones* no son componentes o entidades separadas dentro de la *actividad*, sino que la *actividad* no puede existir más que en la forma de *acciones* o cadenas de *acciones* (Leontiev, 2006). Las acciones orientadas a objetivos y mediadas por instrumentos representan la vía por la que los individuos, de manera aislada o en grupo, pueden llegar a realizar desde las más simples a las más sofisticadas formas de actividad (Ramírez, Cubero y Santamaría, 1990). La *actividad* humana y las *acciones* que la forman incluyen aspectos psicológicos y aspectos sociales, pues por un lado se realizan a través de la conducta de individuos concretos, y por otro expresan formas de conducta histórica y culturalmente organizadas. Estos aspectos abarcan al funcionamiento cognitivo del sujeto, su actitud social y sus procedimientos de mediación semiótica entre otros elementos.

Dicho de otro modo, al definir la cultura en términos de actividades histórico-culturales, el enfoque *histórico-cultural* ofrece el eslabón intermedio entre lo social y lo psicológico. Deja de entender la cultura como estructura abstracta para concebirla como práctica de individuos concretos. Como las *actividades* histórico-culturales y los procesos psicológicos pertenecen a diferentes niveles de análisis, no tiene sentido por tanto tratar de



establecer relaciones mecánicas entre ellos. La tarea de investigación es más bien estudiar a fondo las características de las *actividades* histórico-culturales, sus elementos constituyentes, así como la forma en que surgen y se desarrollan las *acciones* en el marco de estas actividades (De la Mata, 1998).

La relación y distinción entre *actividades* histórico-culturales y *acciones* mentales, ayuda a ir más allá de la *caja negra* en los procesos psicológicos. La clave no está en controlar experimentalmente un gran número de variables que puedan afectar a los procesos cognitivos para aislar los efectos de la cultura, sino en profundizar en los procesos por los que las *actividades* determinan las *acciones* (De la Mata, 1998). En esto último está una clave metodológica para esta tesis. Los signos juegan un papel fundamental en este asunto, pues las *acciones* (psicológicas) están mediadas por signos, y estos surgen de las *actividades* histórico-culturales.

### **II.3.3 Necesidad y significado de la actividad para la pedagogía. Argumentos de Ilyenkov sobre argumentos kantianos.**

El concepto de *actividad* es, para Ilyenkov (2007), el concepto clave que puede unir los esfuerzos de pedagogos, psicólogos y filósofos para acometer la importante tarea de poner bases teóricas claras para los sistemas educativos, a la luz de la gran saturación de soluciones pedagógicas cuyos epicentros y cuyos entusiasmos surgen y desaparecen. Existen señalamientos a favor de la actividad o la acción humanas lo mismo en la Semiótica y la Pragmática de Charles S. Peirce, que en las *teorías de la actividad* de Leontiev y de Rubinstein, en James Wertsch y en muchos otros.

En muchas de las soluciones pedagógicas antes referidas el proceso educativo es visto como aislado de la relación del sujeto con el mundo, traducida esta como actividad orientada a objetos, o como el problema de la aplicación del conocimiento a la vida o en la práctica. Este problema ha demostrado ser complejo y requiere de una solución teórica y práctica. Los egresados de las universidades no saben cómo aplicar lo que saben fuera de ella. Para Ilyenkov (2007), esta es una situación absurda: ante una situación práctica una persona sabe que es necesario y desea actuar de acuerdo con el conocimiento científico, sin embargo actúa como si no lo supiera y se muestra incapaz de aplicar lo que sabe. De aquí surge la idea de que debe haber una cierta habilidad, que es distinta al conocimiento mismo, que le permita aplicarlo. Surge también la pregunta relativa a si esta habilidad se puede enseñar y aprender. Si se puede, entonces debería haber una actividad que relacione el conocimiento con su objeto. Se buscan entonces reglas para relacionar las fórmulas teóricas generales con situaciones que conciernen a un objeto específico, sin ver que se trata de un problema en principio insoluble. La única manera de solucionarlo, para Ilyenkov, es eliminar la condición que origina el problema. El punto es que el conocimiento que no se relaciona con su objeto es ilusorio, no es en realidad conocimiento. Habría entonces una diferencia entre el conocimiento del objeto y la pura formalidad y familiaridad con términos, signos y símbolos y sus combinaciones. La palabra *conocimiento* se usa como sinónimo de un mero dominio de lenguaje o de terminología. En esto está la ilusión que alimenta el problema absurdo de correlacionar el conocimiento con su objeto, problema que no tiene una solución racional.

Esta situación fue ya analizada por el filósofo Emmanuel Kant en su *Crítica de la Razón Pura*. Si el conocimiento que una persona maneja en la escuela consiste en un

agregado de conceptos, definiciones y fórmulas combinados en forma de juicios, deducciones y sistemas de deducciones, es decir, combinados en reglas que constituyen la erudición profesional, entonces le queda una tarea especial a la actividad mental, que es la tarea de colocar casos específicos o individuales bajo esas reglas, o sea, la tarea de acomodar lo específico bajo lo universal. Y es justamente ahí donde reside el problema.

Esta habilidad definida en forma precisa por Kant, consiste en saber cómo distinguir si un caso específico cae bajo una regla general. Kant llama a esta habilidad *poder de juicio*, y es imposible en principio adquirirla en la forma de otra regla por una simple razón: una regla, que por serlo es algo general, a su vez requiere la guía de un *poder de juicio*, o sea, de la habilidad de distinguir si un caso de aplicación de la regla cae dentro de la regla que hemos formulado para esa aplicación. Dice Kant que aunque el entendimiento puede ser enseñado, y está equipado con reglas, además de que puede hacerse uso de los *insights* de otras personas, el juicio es un talento peculiar que puede solamente practicarse pero no puede enseñarse. Sin ese don innato, no puede haber verdadera educación ni prescribirse ninguna regla que proteja del mal uso del conocimiento. De acuerdo a esa regla kantiana, las personas se dividen en las que actúan conforme a reglas originadas en las mentes de otros, y los que derivan reglas brotadas de su experiencia que aplican inteligentemente. La mayoría de las personas pertenecen al primer tipo, y sus mentes actúan de acuerdo a esquemas formales de reglas que les impiden enfrentarse a situaciones en las que no pueden aplicar esquemas previamente dados. Según Ilyenkov, la manera de trascender esto es en principio simple, pero difícil de implementar pedagógicamente. Para él, el arte pedagógico no debe inculcar conjuntos de reglas vistos como herramientas o instrumentos de acción de posible aplicación futura, sino que debe organizar condiciones externas objetivas bajo las

cuales la actividad de aprendizaje pueda tener lugar. En otras palabras, el pedagogo debe crear un sistema de condiciones de acción que fuercen al aprendiz a seguirla. Cuando esta acción es cumplida, el pedagogo puede y debe dar luz a la regla o esquema por el que la acción se lleva a cabo, y que debe ser expresada en palabras y signos. Entonces, y no antes, la regla puede surgir como conciencia verbalizada. En ese caso, el aprendiz es ya capaz de enfrentarse al objeto en conformidad con los requerimientos y naturaleza del propio objeto, y no por una regla o esquema de acción dado previamente en forma independiente a la acción con el objeto.

Ilyenkov señala aquí una curiosa dialéctica. Si se induce la habilidad de actuar de acuerdo a una regla por medio de una situación externa que requiere un cierto método de acción, y esto se da sin la consciencia ni la voluntad del aprendiz, entonces el aprendiz dominará la regla como una forma subjetiva de acción con el objeto. Pero si se hace lo contrario, presentando la regla como tal, es decir, como un esquema para la acción del sujeto, entonces el aprendiz no dominará la regla como un esquema para la acción subjetiva, sino como un esquema externo, un objeto como cualquier otro, como una cosa que posee ciertas propiedades. Sería el ejemplo de una fórmula o un algoritmo, sobre los que el estudiante aprenderá a actuar como lo hace con cualquier otro objeto externo. Tenemos aquí una paradoja psicológica: en ambos casos el pedagogo obtiene lo contrario a lo que quería. Pero si él comunica la regla a través de la organización de una situación objetiva, esto es, no una regla sino un conjunto de condiciones de acción, entonces alcanza lo que se propone, que la regla sea dominada como una regla de actividad subjetiva.

Por esta razón, los pensadores que consideran las dificultades de que habla Kant, insisten en que el modo de acción subjetiva sobre las cosas se da exclusivamente en actos

sobre las cosas y no *a priori* como esquemas de acción. Como decía Hegel, para aprender a nadar hay que echarse al agua.

Dado que el punto de arranque es la acción real con un objeto, junto con la observación del método de acción (reflexión), la regla es dominada como un requerimiento impuesto por la acción con el objeto, es decir, directamente en la forma de una cosa (Ilyenkov, 2007). El conocimiento entonces aparece precisamente como conocimiento de una cosa, y no como una estructura especial situada fuera de ella y que debe ser aplicada a ella para realizar acciones especiales. Esto implica una seria reorientación de la personalidad que conlleva un tipo distinto de relación mental con el conocimiento y con el objeto. En un caso, el sujeto encuentra frente a él dos objetos que tiene forzosamente que relacionar pero que están separados de él. En el otro caso, el sujeto encuentra frente a él un sólo objeto, porque desde el principio está ligado con el conocimiento. Esto ocurre porque el conocimiento emerge en la acción con el objeto, como conocimiento personificado que tiene una mutua relación con las cosas, como conocimiento de las cosas, y no como conocimiento de las frases que otras personas han usado en referencia a esas cosas. Los conceptos de actividad y de acción pueden enfrentar ese reto.

#### **II.3.4 Crítica, limitaciones y precisiones sobre el concepto de *actividad***

En el desarrollo de la *teoría de la actividad* se han hecho progresos en la tarea original que establecieron sus fundadores, a saber, desarrollar una teoría del desarrollo de la psique humana sobre la sola relación con la actividad ligada a objetos. Esta teoría, que había nacido para enfrentar una crisis de la psicología, se encuentra hoy a su vez en crisis por el alejamiento de sus principios con los ricos resultados de la investigación hecha con

ella y en especial fuera de ella. Lazarev (2004) estudia esta crisis y propone vías para superarla. De entrada se señala la doble tarea de la actividad, como principio explicativo de la existencia del hombre y la sociedad y como medio para describir la realidad específica estudiada, lo que presupone dos diferentes objetos ideales. En uno, se trabaja una estructura general de la actividad y sus tipos, y en la otra una concepción de sus mecanismos estudiados por ciencias específicas. Un análisis de la literatura relacionada, permite identificar las características del concepto de actividad:

- La actividad es una forma específicamente humana de relacionarse con el mundo
- A diferencia del comportamiento biológico, la actividad presupone libertad de elección y de diseño de objetivos, o sea, es voluntaria
- Los modos de actividad son determinados por programas histórico-culturales
- La actividad es capaz de un auto-desarrollo ilimitado.
- La forma principal de actividad es de ejecución colectiva.

El concepto *psicológico* de actividad fue construido antes de que lo hiciera la investigación lógico-filosófica desde el materialismo histórico, por lo que los autores de la *teoría de la actividad* tuvieron que construir su propio concepto general de actividad. Así, Rubinstein identificó la serie *movimiento-acción-actividad* para la estructura de la actividad, mientras que Leontiev estableció la serie *actividad-acción-operación*, ligada en correspondencia a la serie *motivo-objetivo-condición*. Se asemejan en que sus planteamientos sobre la actividad no sirven como principio explicativo de la filogénesis ni de la ontogénesis de la psique, pues existe en ellos la contradicción de que la actividad presupone a una psique que la regule (Brushlinskii, 2004). Según Lazarev, este círculo

vicioso no puede resolverse desde el marco de la actividad individual. Sin embargo, creemos que estas contradicciones no aplican en el marco de esta investigación, que se mueve en el dominio microgenético de la acción de adultos, y que aborda un tópico específico que proporciona límites precisos.

Por otro lado, ninguna de las dos posturas distingue actividad de comportamiento, y los toman como sinónimo, siendo que la actividad sería un comportamiento consciente dirigido voluntariamente a un objetivo. La distinción debe hacerse para no aplicar el concepto de actividad a situaciones que no lo son. Además la actividad no se define en términos de desarrollo pues no distingue entre formas simples y altas de desarrollo, por lo mismo ni los mecanismos de transición de la psique. Por esa razón, el sujeto de la actividad se queda como algo abstracto y formal, a veces es sujeto y a veces no lo es. Por eso la actividad no explica la filogénesis. Tanto Rubinstein como Leontiev caen en la contradicción de ver la actividad individual como principio explicativo mientras se reconoce la actividad colectiva como la forma primaria para la emergencia de la consciencia.

Es necesario para Leontiev examinar cómo cambia la estructura interna de la consciencia del hombre con los cambios en la estructura de la actividad, pero su concepto de actividad no puede explicarlo porque no incorpora en su estructura las formas de organización de actividad conjunta, los canales y modos de comunicación entre los participantes, los valores sociales, normas y reglas (Lazarev, 2004). Otra inconsistencia tiene que ver con que el desarrollo individual se cumple por la asimilación por el individuo de toda la experiencia acumulada por las generaciones precedentes, pero ambas posturas no definen ni coinciden en cómo se entiende este proceso ni en el rol que juegan las cualidades

naturales, además de mantener la polaridad entre el mundo material y el ideal. De aquí la necesidad de complementar y articular los principios de la *teoría de la actividad* con principios antropológicos y semióticos, como se hace en esta tesis, que reconocen por un lado la experiencia de las generaciones precedentes, y que tienden puentes dialécticos entre los ámbitos externo e interno.

Leontiev entiende el mecanismo de desarrollo, tomado de Vygotsky, como la actividad interna psíquica que se deriva de la actividad material externa, y reconociendo la estructura instrumental de la actividad humana y su incorporación en un sistema de relaciones con otras personas. Gracias al carácter mediado por instrumentos, el hombre adquiere estructuras que incluyen los medios y modos socio-históricamente transferidos a él en el curso de la comunicación con otras personas, en la forma de acción o discurso. Pero esta postura ha sido criticada. Rubinstein (en Lazarev, 2004) dice que no toda actividad mental o teórica es actividad psíquica, y que ésta se logra en una posterior *internalización*, y que esta es posible sólo si el sujeto tiene ya una psique formada. Brushlinskii (2004) también critica esta idea de *internalización*. Reconoce que el hombre se desarrolla asimilando una cultura, pero esto se da en la comunicación y la actividad que desde el principio son sociales, independientes y creativas, no como en la fórmula unidireccional social  $\rightarrow$  individual, externo  $\rightarrow$  interno, en la que el sujeto es un objeto pasivo. V. Zinchenko dice a su vez que la actividad orientada a objetos es a la vez objetual y mental, y que la lógica unidireccional de lo externo  $\rightarrow$  interno, le quita al desarrollo la parte creativa en la que la formación de lo nuevo es imposible al no haber espacio para la intuición o el descubrimiento.



Es posible reforzar estos argumentos también desde el terreno de la filosofía, en particular la lógica, la dialéctica y la teoría del conocimiento, como señalan Bermúdez y Rodríguez (2001) en su análisis de la dialéctica de *lo externo y lo interno*. En él se afirma que el plano externo de lo psíquico tiene sentido porque coexiste en forma *simultánea* con el plano interno, y que no puede por tanto perderse la unidad dialéctica de los contrarios que parece ignorar el discurso histórico-cultural. Dicen estos autores que la acción no es la parte externa de lo psíquico como tampoco es la interna, y que más bien el contenido de la acción, que es de naturaleza ciertamente psíquica, se expresa en ambos planos. En un par dialéctico como el par externo-interno, un elemento no puede reducirse al otro, ni puede existir uno primero que el otro. De esta forma, los planos inter e intra-psíquico aludidos en la teoría histórico-cultural coexisten simultáneamente y no pueden preceder uno al otro.

Por estas razones, la conexión de la actividad objetual con la ontogénesis de la psique no puede descansar en las orientaciones de la teoría psicológica de la actividad de Leontiev ni la de Rubinstein.

Al discutir la *actividad* como principio explicativo, el académico ruso Iudin (en Lazarev, 2004, pues no hay actualmente traducción a ningún idioma desde el original ruso), afirma que esta sólo tiene una función real y no ilusoria en el grado que tiene una interpretación objetiva en algún campo específico de conocimiento, lo que le confiere una realidad y unos límites específicos; además, el concepto de *actividad* debe ser desarrollado estructuralmente para aplicarse a un objeto de estudio específico también. Estas afirmaciones de Iudin son sustanciales para esta tesis doctoral, pues en esta se pone el interés en objetos puntuales o específicos como los objetos matemáticos que introducen a la

Derivada, y las funciones semióticas que caracterizan a cada objeto forman la estructura específica de la actividad ligada a este.

Según Lazarev (2004), el concepto de *actividad* tanto en Leontiev como en Rubinstein no señala los límites de aplicabilidad de sus respectivas teorías como principio explicativo de la ontogénesis individual de la psique, sino que consideran la actividad como principio universal en la vida humana. Como resultado, toman todo comportamiento como actividad, pero no todo trabajo es actividad laboral, ni todo aprendizaje es actividad de aprendizaje, ni todo juego es actividad lúdica.

Además, puesto que el concepto de *actividad* no se define en términos de desarrollo, no puede usarse para representar la evolución de la actividad como un objeto de investigación. Es necesario, dice Lazarev, crear una tercera versión que se enfrente a las contradicciones de las dos conocidas.

Los aportes de V.V. Davydov van en esa nueva dirección. Se discutirán aquí algunas de sus ideas. Dice Davydov (en Lazarev, 2004) que después de muchos experimentos y de estudios teóricos, llegó a las conclusiones siguientes: que el origen de la actividad individual no puede entenderse sin considerar las primordiales conexiones con la comunicación y con los sistemas semióticos; en consecuencia, actividad, comunicación y sistemas semióticos deben estudiarse juntos, y que este estudio debe ser multidisciplinario. Afirma asimismo que la nueva teoría depende de la fusión entre la *teoría de la actividad* y la *aproximación semiótica* de Vygotsky. Davydov propone una nueva estructura de la actividad que, además de los elementos de Leontiev, a saber, requerimientos, una tarea (como unidad de motivos y condiciones), acciones y operaciones, incluya también

necesidades, motivos de la acción, emociones, planos (perceptuales, nemotécnicos, mentales, creativos) y la voluntad. En su opinión, sin entender lo que es *necesario*, sea orgánico o espiritual, y en cómo esto se convierte en requerimientos, nada se puede decir de *actividad*. Esto conecta de alguna manera con la idea de *orientación* en la postura teórica de Piotr Galperin, que se estudiará adelante.

#### **II.4 Extensión del concepto de *internalización* y crítica a la postura metodológica de la teoría histórico-cultural de Vygotsky por parte de Piotr Galperin**

Piotr Yakolevich Galperin (1902-1988) fue contemporáneo de Vygotsky, de Leontiev y de Luria. Se formó como médico y psico-neurólogo y desde su juventud se interesó en estudiar los procesos mentales más elusivos. Más adelante, se enfocó en el rol de la actividad externa en la formación de la mente humana. Como Leontiev, fue influenciado profundamente por el proyecto vygotskiano de reconstruir la psicología, pero al mismo tiempo desarrolló su propia versión de esta empresa.

La teoría de Galperin usa y da una nueva y necesaria extensión a las ideas de su maestro Lev Vygotsky, en especial la idea de la *internalización* de actos externos y su transformación en actos mentales internos (Koshmanova, 2007; Werstch, 1997). La teoría de Galperin provee importantes contribuciones acerca de cómo analizar la naturaleza de la construcción cultural de la mente sin perder el aspecto del funcionamiento psicológico individual, o sea, acerca del problema central de la teoría *histórico-cultural* Arieievitch (2003).

Específicamente, la estrategia de investigación de Galperin consiste en analizar cómo emergen nuevos procesos mentales en el contexto de actividades de enseñanza y aprendizaje significativas y orientadas a objetos, a través de la gradual *internalización* de las acciones de los aprendices (Arievitch y Haenen, 2005). El énfasis está en la actividad práctica del estudiante como el *lugar* de la formación de las funciones cognitivas, o sea, en cómo la actividad externa se traduce en percepciones, imágenes y conceptos (Koshmanova, 2007). Estas ideas fueron desarrolladas a partir de experimentos con niños en actividades lúdicas y con adultos lisiados de guerra; en ambos casos, Galperin encontró gran diferencia entre las operaciones ejecutadas con un significado y relacionadas a objetos, respecto a las mismas operaciones ejecutadas sin ellos. Esto fue perfilando la idea de que la actividad significativa mediada por herramientas culturales era la fuente y el contexto del desarrollo cognitivo.

La propuesta de Galperin está basada en ideas histórico-culturales clave: el rol central de la enseñanza y el aprendizaje en el desarrollo (según Vygotsky, la enseñanza sólo es útil si promueve el desarrollo); la *internalización* de acciones materiales como camino al desarrollo cognitivo; y la centralidad de las herramientas culturales y la interacción social en el desarrollo.

Para entender a Galperin, es necesario, como dice Arievitch (2003), ver la continuidad y diferencias entre Galperin, Vygotsky y Leontiev, teóricos imprescindibles en la aproximación *cultural-histórica* o *histórico-cultural*. El aporte de Galperin se sitúa en cómo sortear la dicotomía *externo-interno*, o *social-individual* desde el punto de vista psicológico. Vygotsky revolucionó este tema al establecer la interacción humana mediada por herramientas y signos como fuente del desarrollo psicológico. Leontiev y su grupo, por

su lado, dieron un giro en el enfoque de tal fuente hacia la actividad significativa relacionada a objetos, lo que dio lugar a debates y a la relativa separación de los académicos obedeciendo en parte a cuestiones ideológicas de la Rusia soviética. En estos debates se tachó a Vygotsky de idealista, y por ello alejado del materialismo oficial al que se ciñeron Leontiev y otros. Arievitch ve sin embargo las posturas de los tres académicos rusos como interpretaciones distintas pertenecientes al mismo tronco *histórico-cultural*. El propio Galperin ve la continuidad existente entre su obra y las de Vygotsky y Leontiev.

Para entrar un poco más en detalle, se puede decir que mientras Vygotsky, al entender la interacción social como comunicación e intercambio de información, y Leontiev, al entender la acción humana como las transformaciones materiales de una situación dada, se puede ver que dejan de lado la naturaleza cultural-histórica de la interacción social, de los sistemas simbólicos y de la actividad humana. Cuando se considera esa naturaleza, se evidencia el parentesco de las tres variantes teóricas (Arievitch, 2003).

Los experimentos de Leontiev demostraron que los logros cognitivos dependen genéticamente de la actividad externa individual, lo que lo condujo a decir que la *internalización* no es una transferencia de una actividad externa a un plano interno pre-existente, sino que más bien es el proceso en que este plano interno se forma. Leontiev cuestionó la existencia de algo *interno* antes de la adquisición de experiencias sociales y culturales, debate que persiste (Lazarev, 2004), pero no fue más allá teórica ni metodológicamente en ese asunto. Galperin es quien trabajó en esa línea, arguyendo que se necesitaba clarificar cómo sucede la transformación de lo *externo* (no-psicológico) en lo *interno* (psicológico), pues creía que ni la comunicación humana ni el impacto de la

actividad material en la mente del individuo fueran suficientes por sí solas para explicar ese asunto. Parecía ser insuperable la cuestión de entender la actividad mental como algo sustantivo susceptible de análisis objetivo (Arievitch, 2003), y que el rol de la actividad externa sólo fuera una condición y no algo a tomar en cuenta. En esta idea sin embargo, lo externo sigue siendo externo y lo interno sigue siendo interno. En este punto es donde Galperin hace una de sus mayores aportaciones.

Galperin notó que cuando la actividad de un sujeto es ejecutada en el plano mental, el investigador no tiene acceso a su contenido ni a su estructura, pues no se enfrenta con la actividad misma sino con el residuo superficial de la actividad. La inaccesibilidad a los procesos mentales a través de observación interna o externa ha provocado que se estudie cosas como la consciencia o el comportamiento en vez de revelar los mecanismos subyacentes del fenómeno (Arievitch y Haenen, 2005). Según Galperin, esto es lo que ocurrió a Piaget, quién dijo que el tema propio de la Psicología habría que buscarlo en la fisiología o en la lógica. Por su lado, Vygotsky cayó en contradicción entre sus ideas teóricas y su metodología de investigación, pues aunque este autor propuso que la cooperación con adultos incrementa las habilidades del niño induciendo una transición al próximo nivel de desarrollo, y aunque propuso conceptos interesantes como la *zona de desarrollo próximo* que lo distinguían del trabajo de Piaget, ¿porqué, se pregunta Galperin, la descripción de Vygotsky de las etapas de desarrollo mental coinciden con las de Piaget? Galperin responde diciendo que la metodología de Vygotsky nunca permitió clarificar la función específica del adulto que interactúa con el niño en la *zona de desarrollo próximo*, o bien, que Vygotsky estudió el curso natural del desarrollo tal como lo hizo Piaget. Galperin opina que el método usado por Vygotsky, el de la *doble estimulación* (que estudia el efecto

psicológico del cambio gradual del sujeto ante dos tipos de estímulos, palabras y objetos), es sólo una modificación del método de estudio transversal, que limita la investigación al estudio de una etapa particular del desarrollo (Arievitch y Haenen, 2005). Vygotsky señaló el rol central de la enseñanza en el desarrollo mental, y se esperaba que diera el paso siguiente, que era averiguar el tipo de enseñanza y el tipo de interacción niño-adulto que impulsara ese desarrollo, pero según Galperin, su metodología no se lo permitió. Y por eso Galperin concluye que para lograrlo es necesario desprenderse de la sola observación en favor de la *construcción activa de acciones externas* y de *guiar su transformación en procesos mentales*. Galperin ve en esto un nuevo paradigma de investigación, además de una manera de conectar la investigación psicológica con la enseñanza y el aprendizaje. Esta cercanía de las ideas de Galperin con los procesos de enseñanza ha provocado que algunos académicos vean esta postura con un cierto desprecio, y se refieren a él sólo como un autor de técnicas de instrucción concretas, cuando de hecho, para Arievitch (2003), la obra de Galperin es mucho más amplia de miras y contiene contribuciones originales a problemas fundamentales de la Psicología.

#### **II.4.1 Componentes de la teoría de Galperin**

El sistema de ideas de Galperin va más allá de los procedimientos educativos por los que es más conocido. Su aporte, primero que nada, tiene que ver con su método de investigación, que fue más allá de la sola observación y se enfocó en construir activamente los procesos psicológicos, al tratar de responder dos preguntas: ¿cuál es la naturaleza de los procesos mentales?, y ¿cómo tener acceso a su estudio objetivo?, si bien su teoría abarca otros temas fundamentales en Psicología.

La base de su teoría fue la conceptualización de la naturaleza y funciones de los procesos psicológicos, y se dedicó a clarificar el rol de la regulación psicológica en la adaptación a ambientes cambiantes. Relacionada a esto es la consideración de los procesos psicológicos como una forma de actividad adaptativa a esos ambientes. Esto permitió a Galperin mostrar la continuidad en la evolución del funcionamiento mental, y también analizar lo específico del desarrollo mental humano, el cual emerge en formas de vida sociales y en prácticas culturales, como pensaba también Vygotsky. De la reflexión y experiencias acerca de cómo se forma la actividad mental humana, surgió una nueva metodología, la *formación gradual o paso-a-paso de la acción mental*, que estudia cómo un nuevo proceso psicológico emerge desde procesos materiales o no-psicológicos. Con este método, Galperin pudo construir activamente este proceso psicológico a través de experimentos cuidadosamente diseñados, es decir, guiando la *internalización* de una nueva actividad individual. El entendimiento de los procesos mentales en una forma no-mentalista, y del individuo en una forma no-individualista, es una muy importante contribución de Galperin.

#### **II.4.2 El concepto de *internalización* en Galperin**

El concepto de *internalización* fue una de las bases del pensamiento de Vygotsky, y la idea de Galperin acerca de la formación sistemática de *acciones mentales*, es en realidad una extensión del concepto de Vygotsky (Koshmanova, 2007; Arievitich y Haenen, 2005). Galperin operacionalizó el concepto de *internalización* sobre las diferencias cualitativas entre los tipos de acción en animales y humanos, sobre todo en que estos últimos tienen la habilidad de actuar con sustitutos simbólicos de los objetos sin la presencia de estos. Galperin construye su concepto de *internalización* justamente sobre esta habilidad. El



término *internalización* manejado antes de Galperin, conlleva una connotación dualista entre algo externo y algo interno, y evoca la imagen de algo material o espacial llevado después dentro de algo *interno*, algo mental. La connotación está presente también en frases como *plano interno de acción*, y *funcionamiento interno*. La idea de *internalización* en Galperin tiene más bien que ver con el énfasis en el funcionamiento específicamente humano, lo cual, en opinión de Arieviditch (2003), no se alcanza con los términos *apropiación* o *dominio*. Por eso hay que re-conceptualizar el término *internalización* para que recoja las características específicamente humanas de funcionamiento, a través del análisis que hace Galperin de diferentes tipos de acciones.

Así, las *acciones mentales* no son facultades mentales o internas, ni son reflexión de un proceso cerebral. Son acciones ligadas a objetos, como cualquier otra acción humana, con la diferencia de que se ejecuta en una forma especial, sin ejecución física. Conceptualizar la *acción mental* como una actividad ligada a objetos, implica que ocurre en el mundo objetivo externo. Se lleva a cabo no de acuerdo a leyes mentales sino a leyes y procesos del mundo externo, y tienen el mismo contenido objetivo que las acciones materiales en un asunto dado (Koshmanova, 2007; Arieviditch y Haenen, 2005). Galperin ha demostrado en sus investigaciones que hay regularidades en la transformación desde la forma material a la mental del mismo contenido objetivo en varios rubros, como el pensamiento conceptual, la percepción y el desarrollo del lenguaje (Arieviditch, 2003). Por ejemplo, demostró que formas materiales de control de la auto-ejecución en niños, se transforma gradualmente en un nuevo proceso psicológico, el proceso de atención. Así, la atención es mostrada desde su génesis, como una forma mental abreviada proveniente de la

acción material de control. Esas raíces genéticas quedan ocultas en las investigaciones hechas desde teorías de la atención de corte cognitivo.

Estas investigaciones demostraron que la dicotomía externo-interno puede eliminarse, y que cualquier acción humana, mental y material, está caracterizada por su relación al objeto, con la condición de que tal acción siga la lógica y relaciones del objeto externo. Esto no puede explicarse refiriéndose a los componentes inherentemente internos como los psicológicos o fisiológicos, sino reconociendo que la acción sigue reglas objetivas del mundo externo, y que la acción mental emerge de acciones externas. El carácter concreto de las acciones emergentes puede parecer muy distinto en su forma final, como se ve en los dos ejemplos que menciona Arievitich, un jugador de ajedrez que analiza la situación actual de su juego, y un niño clasificando objetos. Sin embargo ambos son el resultado del mismo proceso, una forma específicamente humana de aprender nuevas acciones desde formas materiales hasta formas abreviadas de acción, es decir, de *internalización*, vista por Arievitich como un mecanismo fundamental del aprendizaje y del desarrollo humanos.

En cuanto a la relación entre *acción mental*, *apropiación* e *internalización*, hay que señalar con Arievitich y van der Veer (1995), que sólo en la formación de *acciones mentales* es que la *apropiación* o adquisición de algún tipo de actividad por el sujeto, coincide con la *internalización*, cosa que no sucede con la acción física o perceptual, en las que *apropiación* no se corresponde con *internalización*, pues la ejecución de esas acciones se queda en el mismo plano. Para Galperin, sólo cuando la apropiación de una nueva acción conduce a la formación de una acción mental es que podemos hablar de *internalización* de esa acción.

Una formulación sucinta del concepto de *internalización* en Galperin puede ser la que ofrecen Arieviditch y van der Veer (1995):

*Internalización es el tipo específico de apropiación de una nueva acción que involucra la formación de una acción mental, la cual es concebida como la ejecución del sujeto en una situación problemática que es independiente de la presencia física de los elementos del problema.*

En otras palabras, *internalización* es la transición del sujeto desde la solución del problema que depende de objetos físicos a una solución que no necesita de su presencia. De nuevo se señala que *internalización* no implica que la *acción mental* suceda solamente dentro del individuo o de su cerebro, sino sólo la posibilidad de que el sujeto lleve a cabo acciones sin la presencia física del objeto de la acción. Los animales tienen por supuesto actividad psíquica, pero esta nunca es internalizada o abstraída del mundo material o perceptual. Sólo los humanos pueden actuar independientemente de la situación percibida, en la mente o internamente.

#### **II.4.3 El análisis del rol de la enseñanza en el desarrollo cognitivo en Galperin**

Se ha dicho que el interés de Galperin es estudiar el proceso de desarrollo cognitivo a través del estudio del proceso de *internalización* de herramientas culturales como una forma exclusiva del desarrollo humano, siguiendo la pista de Vygotsky. Pero Galperin va más allá al operacionalizar los conceptos de herramienta cultural, mediación e *internalización* investigando las maneras en que se forma el plano interno de la acción mental, que es la transformación y abreviación de la acción material. Para esto, analizó y comparó el potencial de desarrollo cognitivo de tres tipos de proceso enseñanza-

aprendizaje: el proceso *tradicional*, el proceso *sistémico-empírico*, y el proceso *sistémico-teórico* que se revisarán a continuación. Estos nombres no son los que usó Galperin, sino que provienen del esclarecedor análisis de Arieviditch y Stetsenko (2000).

La enseñanza-aprendizaje *tradicional* ofrece poca o nula *orientación* para la tarea del aprendiz, y su proceso enseñanza-aprendizaje tiene carácter empírico, lo que configura sus limitados o nulos resultados en el desarrollo. Galperin llama la atención hacia el parecido de los resultados de Vygotsky con los de Piaget, que son producto no de una regularidad en la mente de los aprendices, sino en los métodos instructivos que ambos usaron, caracterizados por no ofrecer herramientas ni condiciones para una correcta *orientación* del aprendiz en la tarea, como lo son criterios, indicaciones, claves y algoritmos de acción. Este tipo de instrucción se basa en la explicación de la tarea que da el profesor, la presentación de reglas generales de solución, la explicación de estas reglas a través de ejemplos típicos, la memorización de las reglas por el aprendiz y la práctica en problemas tipificados. Permanecen ocultas las reglas implícitas que el experto ya ha automatizado, y que el aprendiz debe descubrir penosamente a través de prueba y error. Esto hace que las acciones del aprendiz sean inestables, pobremente generalizadas y limitadas sólo a tareas familiares. Con este proceso de enseñanza-aprendizaje es casi imposible ubicar el origen del desarrollo cognitivo ni su relación con la instrucción. Es lógico que las regularidades encontradas sean respecto a la edad o a las diferencias innatas en las habilidades mentales, más que al tipo de instrucción.

En el proceso *sistémico-empírico* de enseñanza-aprendizaje, se dan al aprendiz los criterios, indicaciones, claves y algoritmos de acción para desarrollar la tarea, que generalmente son ofrecidos en un sistema comprensible en forma simbólica. Con esto el

aprendiz tiene una nueva herramienta cognitiva que le provee de una orientación básica en tareas de determinado dominio. Cuando el aprendiz aplica esta herramienta en tareas y problemas, su aplicación se va transformando y finalmente se internaliza pasando a formar parte de su funcionamiento cognitivo.

Este tipo de instrucción se caracteriza por diseñar una base suficiente de orientación para resolver determinado tipo de problemas, por guiar la reflexión y la transformación de las acciones materiales en formas mentales internalizadas. Con estos principios, Galperin y sus colegas experimentaron con la formación sistemática de muchos tipos de acción, conceptos y habilidades en física, geometría, matemáticas elementales, historia, escritura a máquina, pensamiento sistémico y otros. Existen unos 800 experimentos llevados a cabo en Rusia en los años 60 y 70 del siglo pasado (Arievitch y Stetsenko, 2000), en los que los temas manejados y las reglas se presentan como un todo desde la orientación inicial en forma de ayudas visuales, mapas y diagramas, lo que facilita la orientación del aprendiz y el dominio acelerado y de alta calidad de temas complejos. El tiempo antes empleado en ensayos y error, aquí se dedica a formar una nueva acción, habilidad o concepto, reduciendo la variabilidad de resultados y aumentando la transferencia. Esta instrucción es llamada *sistémica* porque las condiciones y criterios para la ejecución efectiva de la tarea se presentan al aprendiz en un sistema significativo desde el principio. Pero es *empírica* porque está basada en conceptos empíricos en los que la lógica interna de los temas permanece casi siempre oculta, no sólo para los aprendices sino a veces también para los maestros. Esto restringe la ejecución de los estudiantes y hace que las herramientas cognitivas sirvan sólo para algunas tareas específicas. Además, no se aprecia un cambio cualitativo en el sistema de pensamiento del aprendiz, y esto por las dos razones que da

Galperin: por el carácter empírico de la orientación, que no muestra cómo se produjeron las propiedades del objeto o fenómeno estudiado, y porque el sistema de orientación se presenta ya acabado, lo que provoca una aplicación meramente práctica del conocimiento, reduciendo su potencial en el desarrollo.

La instrucción *sistémica-teórica* es la que más revela su relación con el desarrollo, y su esencia es la provisión al estudiante de los medios teóricos o métodos generales para construir una base orientadora para resolver cualquier problema específico de un tema dado. Esto involucra un análisis teórico de objetos, fenómenos y eventos que revele su génesis, estructura, reglas generales y características esenciales, es decir, que revele cómo se producen las propiedades y los conceptos. Esto permitirá al estudiante usar estos métodos generales como herramientas cognitivas en otros problemas. Más específicamente, tal análisis incluye: a) discriminar entre diferentes propiedades de los objetos o fenómenos, b) establecer la unidad básica de análisis de una propiedad particular, y c) revelar al aprendiz la regla general, común a todos los objetos del área de estudio, y el cómo se combinan estas unidades en la solución de problemas concretos (Arievitch y Stetsenko, 2000).

El aprendizaje ocurre por la exploración activa del estudiante bajo la guía del profesor, y utiliza símbolos y modelos gráficos que representen las relaciones básicas de los objetos para su análisis sistémico. Bajo el liderazgo del profesor, los estudiantes estudian en profundidad una habilidad, las condiciones de su ejecución exitosa, sus dificultades y variantes; consideran también las alternativas a la base de orientación de los actos que apuntan a la formación de la habilidad, y escogen la mejor variante de la base (Koshmanova, 2007). En ese tipo de orientación, el estudiante piensa, sugiere soluciones y

supuestos, expresa dudas, argumenta y se involucra en forma máxima en el proceso de pensar y aprender, y de este modo desarrolla sus habilidades.

En el estudio comparativo comentado más arriba acerca de diferentes tipos de instrucción de Pantina en 1957 (en Arieviditch y Stetsenko, 2000, y en Karpov y Bransford, 1995), tres grupos de niños de seis años aprendieron a escribir letras del alfabeto ruso. En el primer grupo (tradicional), el profesor dio el patrón de una letra a los niños, explicando y demostrando cómo escribirla. No se mencionaron los segmentos básicos que forman la letra. Los niños empezaron a trazarla bajo la supervisión del maestro, quien señalaba los errores y repetía la explicación si era necesario. Cuando los niños eran capaces de copiar correctamente la letra, el profesor pasaba a la siguiente; el avance fue lento y con muchos ensayos y errores; la ejecución era inestable y no se transfería al trabajo con otras letras.

En el segundo grupo se usó la instrucción *sistémica-empírica*, en la que se daba a los niños el patrón de una letra y también una orientación en la forma de puntos o índices del contorno de su figura. Con la guía del profesor, los niños aprendieron a copiar estos índices y reproducir la letra, al principio con ayuda de papel semitransparente. Este proceso se repitió con todas las letras, en las que fue necesario mostrar el nuevo juego de índices para cada una. El aprendizaje fue más rápido y eficiente que en el grupo tradicional debido a la orientación dada, que fue completa pero a nivel empírico.

El tercer grupo recibió *instrucción sistémica-teórica*; los niños analizaron el contorno de las letras caracterizado por su modelo de índices colocados donde empezaban, terminaban o cambiaban de dirección los segmentos. Los niños aprendieron a identificar los índices cruciales del contorno y la unidad básica, que eran los segmentos que no cambian

de dirección. Usando este *método general*, los niños pudieron reproducir el modelo de la letra en otra página y copiar la letra misma. La explicación se hizo sólo para la primera letra; al empezar con la segunda, los niños mismos, con la guía del profesor, aislaron los índices, construyeron el modelo y copiaron la letra. Dominando el método de construcción de las herramientas de orientación –los índices- para cualquier letra, los niños avanzaron muy rápido y pronto analizaron y reprodujeron los contornos en forma visual, sin poner puntos en el papel. Los errores fueron raros y tuvo lugar una transferencia que permitió también reproducir el contorno de letras en latín, árabe y armenio. Pantina encontró también transferencias hacia otras funciones cognitivas por lo que, de acuerdo a Piaget, se puede hablar de un genuino desarrollo cognitivo y no de sólo el mejoramiento de alguna habilidad particular.

En suma, los niños llegaron a dominar el método mientras exploraban activamente las propiedades de los objetos bajo la guía del profesor y con la ayuda de herramientas cognitivas. Esta última situación ofrece un modelo que será sustancial para esta tesis.

Los modelos o esquemas de la estructura racional de los objetos y sus relaciones al principio ocultas, una vez internalizadas por los aprendices, se convierten en la base de orientación en un tema futuro más amplio. Las nuevas herramientas cognitivas, o como las nombra Galperin, los *esquemas operacionales de pensamiento*, cambian cualitativamente la manera de ver las cosas en el aprendiz, en pensarlas y en operar con ellas. De hecho, avanzan el desarrollo cognitivo hacia un nivel más alto.

La *orientación* en lo que concierne a la estructura racional implícita en los objetos y en sus relaciones esenciales, hace el aprendizaje inherentemente significativo e interesante



para el aprendiz, pues no está basado en memorización y repetición, sino en un proceso de descubrimiento de conexiones racionales y significativas entre objetos o fenómenos aparentemente no relacionados, o en lo que superficialmente aparece desordenado e incoherente (Arievitch y Stetsenko, 2000).

Del análisis de Galperin se concluye que cualquier discusión sobre el rol de la enseñanza en el desarrollo cognitivo de los aprendices, es improductiva si no se refiere al tipo específico de enseñanza que de hecho se aplica en su aprendizaje. Dependiendo del tipo de enseñanza, su rol en el desarrollo será diferente. De aquí se explica el bajo impacto de la enseñanza tradicional –con énfasis en ejemplos simples, memorización de principios básicos, progreso gradual desde tareas simples a complejas- en el desarrollo cognitivo, lo que ha provocado una sobre-generalización en la afirmación de que enseñanza y desarrollo no están conectados en forma directa, que a su vez es producto de la ignorancia en la aplicación de métodos de instrucción alternativos.

La propiedad central que define el potencial de desarrollo que tiene un tipo de enseñanza, es la calidad de las herramientas cognitivas que son dadas al aprendiz para orientarlo en la ejecución efectiva de la tarea.

Galperin, al ayudar a revelar el contenido del proceso que liga aprendizaje y desarrollo, ayuda a definir también la propia idea de desarrollo, en la que él operacionaliza el mecanismo de los cambios cualitativos que suceden mientras el aprendiz se hace de nuevas herramientas cognitivas, y no basado en regularidades internas del aprendiz en relación a su edad o habilidades individuales.

#### II.4.4 El método paso-a-paso de formación de acciones mentales

En la *formación de acciones mentales*, las acciones son conceptualizadas en forma amplia como *intentos conscientes de transformar los objetos de acuerdo a un resultado pretendido*. Esto puede referirse a cortar la rama de un árbol, usar un concepto correctamente, decorar un cuarto o sumar números (Arievitch y Haenen, 2005). Cualquier ejemplo se puede usar para mostrar cómo una acción puede ejecutarse en varios niveles de abstracción. Galperin los clasifica en tres niveles:

- *material,*
- *verbal, y*
- *mental*

y los caracteriza de acuerdo al modo de pensar de cada uno. Así, la acción debe ser primero significativa, luego generalizada y abreviada y finalmente internalizada y lista para servir de orientación de más alto nivel de la acción ejecutada y para acciones futuras.

Para asegurar la iniciación del aprendiz en la tarea de aprendizaje y guiar sus primeros pasos en la *zona de desarrollo próximo* vygotskiana, Galperin establece una extensa fase previa de *orientación*, pues considera que cada acción humana es lograda sobre la base de alguna orientación, que en gran parte determina su calidad (Haenen, 2001). Con esto el aprendiz acepta el valor afectivo, de motivación y cognoscitivo del conocimiento a adquirir antes de su apropiación real y su aplicación.

En esta *orientación*, diseñada para proveer al aprendiz con toda la información necesaria para la correcta ejecución de una nueva acción, el profesor explica al aprendiz el objetivo de la tarea a través de un *organizador previo* que crea la primera motivación para

aprender. Los contenidos deben presentarse desde el principio en la forma de un todo significativo, según Galperin, como algo que tendrá que ser entendido después en detalle. Los estudiantes, que con esto abren su *zona de desarrollo próximo*, se comprometen con la tarea conociendo su objetivo, condiciones y medios de realización. Una manera de presentar esta información junta es a través de un mapa orientador, que es un esquema operacional de pensamiento y una herramienta de acción que provee un panorama claro y la secuencia de la acción que va a desarrollarse, así como sus condiciones y reglas de acción. En la interpretación de Bouniaev (1996), un seguidor de Galperin, la base orientadora está formada por el conocimiento declarativo y heurístico que el sujeto tiene en un momento dado, además de los procedimientos para su aplicación que son requeridos por la acción.

Resultados de investigación (comentados en Arieovich y Haenen, 2005) han demostrado que el contenido de estos mapas se aprende fácilmente sin memorización deliberada por los estudiantes, en el curso de la ejecución de las tareas, y han tenido buen éxito en dominios tales como el uso de verbos rusos o en problemas de termodinámica.

Siguiendo la secuencia sugerida en la *orientación*, la acción se ejecuta en el nivel *material* manipulando objetos físicos o sus representaciones, como modelos, fotografías o diagramas que reflejen las propiedades y relaciones esenciales para la acción. En términos de pensamiento, esto puede llamarse *pensamiento operativo*. No es indispensable la manipulación física, pues también puede servir como sucedáneo el pensamiento *figurativo*, lo que sucedería por ejemplo al *mover* visual o mentalmente un objeto. Estudios como los de Ausubel, Salmina y Talyzina (citados en Arieovich y Haenen, 2005) han demostrado que no sólo es necesario el uso de estas representaciones para los niños, sino también para adultos que se enfrentan con un asunto completamente nuevo para ellos.

Nivel *verbal*. Una vez dominada la acción con el apoyo de objetos físicos o sus representaciones, se eleva el nivel de la acción prescindiendo de ellos o liberándose de la inmediatez objetal, y entrando en el discurso abierto o social. En el procedimiento de Galperin, los estudiantes son llevados a pensar en voz alta sin manipular objetos tangibles, con lo que la acción pasa de ser práctica a ser verbal. El discurso se convierte en la única representación tanto de la acción como de sus objetos. Esta acción con discurso abierto ya no es acción material pero no es aún acción mental. El estudiante todavía no es capaz de ejecutar la acción a través de discurso interno, o sea, en la mente. El discurso abierto (pensamiento comunicativo) es una fase transitoria entre el nivel material y el mental. Los argumentos que da Galperin para la necesidad del discurso abierto son, primero, que en este la acción ya está en una etapa de algún modo teórica, que ya no depende de objetos materiales ya que son reemplazados con palabras. Esto implica que la acción ha sido ya generalizada. El segundo argumento se refiere a la función comunicadora del discurso, cuyo efecto está determinado por su rol social. El estudiante ejecuta la acción verbal de tal forma que sea comprensible para otros, y a la vez comprensible en el lenguaje de la disciplina en que se incluye la acción. Por eso el discurso abierto es llamado pensamiento comunicativo, que coincide con la idea vygotskiana de que el discurso social se convierte en la fuente del conocimiento. En suma, las funciones generalizadoras y comunicativas del discurso utilizado en la interacción verbal son las que lo hacen efectivo en el aprendizaje.

Después de ejecutar la acción en discurso abierto, el estudiante es llevado a actuar en discurso encubierto (pensamiento dialógico). La transición entre discurso abierto a encubierto (discurso sin sonido) requiere, según Galperin, de una transformación en la estructura misma del discurso. Esta *imagen audible* de la palabra evoluciona sólo después

de que la acción pasó por el discurso abierto, y es más estable y fuerte que un imagen perceptual, que evoluciona desde la acción material al subsecuente discurso abierto.

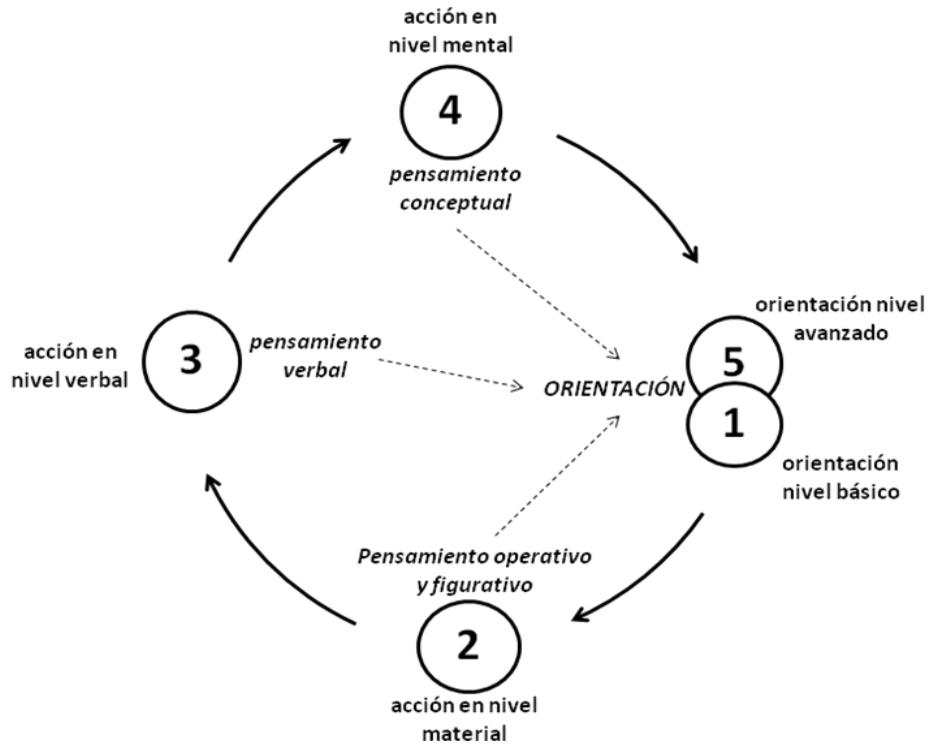
Aunque la acción ya es de algún modo hacia adentro, el discurso es el portador tanto de la acción como de sus objetos. Galperin llama a la imagen audible *discurso externo hacia sí mismo*, porque la ejecución de la acción en este nivel requiere de una postura comunicativa que se basa en un diálogo interno, que algunos generalizan como *pensamiento dialógico* en la que la acción deviene más y más rutinaria o casi automatizada, aunque sin llegar a ser *mental*.

*Nivel mental.* En la etapa de discurso encubierto, los estudiantes empiezan a ejecutar todos los aspectos de una acción en forma más rápida y fácil, y el profesor abandona el control de los resultados parciales y sólo se ocupa de los finales. En esta etapa la acción es abreviada pues es transformada en un fenómeno mental, una cadena de imágenes y conceptos. Sin embargo, según Galperin, por haber pasado por los niveles *material-verbal-mental*, la acción toma otra forma cualitativamente distinta, la de conocimiento puro, que ahora funciona como *orientación* para que el estudiante anticipe los efectos de sus acciones, o ajuste estas a una nueva situación. O sea, la nueva función psicológica creada contribuye a la auto-regulación. Si estudiásemos una acción al final, en el nivel mental, ya abreviada y automatizada, sólo veríamos un comportamiento (final) del estudiante. En contraste, dice Galperin que la formación guiada de las acciones, aparte de su valor educativo, abre la posibilidad de analizar la estructura oculta de los fenómenos que subyacen a las acciones, y su génesis.

*Acción orientadora hacia un nivel más avanzado.* Al final de cada ciclo, los estudiantes tienen un mejor entendimiento de las acciones que han abordado, y están más

informados en ellas como resultado de las actividades previas en los niveles precedentes. Esto puede ser observado en nuevas formas de actividad orientadora. Galperin vio la habilidad para ver hacia adelante (es decir para orientarse) como una condición y un primer aspecto del aprendizaje. En psicología de la educación, esta habilidad es considerada como parte de la auto-regulación, y existe investigación (citada en Arieivitch y Haenen, 2005) acerca de los efectos positivos de la presencia de esta habilidad en el rendimiento académico y el desarrollo futuro de los estudiantes. Galperin piensa que para mejorar el potencial de aprendizaje de los estudiantes en la *zona de desarrollo próximo*, se debe enfocar en mejorar las cualidades de su actividad orientadora dentro del procedimiento gradual de enseñanza-aprendizaje.

La gran ventaja de las acciones mentales es que su resultado puede predecirse antes de que se lleve a cabo físicamente, y puede cotejarse y evaluarse respecto a algún objetivo dado (Arieivitch y van der Veer, 1995). El sujeto por tanto puede hacer correcciones previas a la acción material para evitar o reducir errores. Galperin ve esta orientación mental anticipatoria y los ajustes preliminares del entorno cambiante como la función principal de la psique.



**Figura 4:** proceso de formación paso-a-paso de acciones mentales

Estos niveles fundamentales de abstracción y sus tipos de pensamiento asociados, representados en la *Figura 4* tomada de Arievitich y Haenen (2005), son igualmente importantes para Galperin, y cada uno tiene su lugar en el proceso enseñanza-aprendizaje. Cuando las acciones pasan por los niveles *material-verbal-mental*, hay una razonable garantía de que se formará una acción mental sobre los principios de *generalización* y de *abreviación*. De estos dos principios habla también Valsiner (2001) pero respecto a la acción de los signos en la mediación semiótica, no respecto a las acciones, aunque creemos que ambas posturas están íntimamente relacionadas. Se ha presentado el debate y los traslapes entre estos dos intereses de la postura *histórico-cultural* o *histórico-cultural*, que tienen énfasis respectivamente en la mediación semiótica y en la actividad con objetos, pero también se ha señalado la posibilidad de complementación y enriquecimiento mutuo que es la postura adoptada en esta investigación.

Respecto a la *generalización*, el hecho de pasar a través de todos los niveles que señala Galperin, provoca que el estudiante ponga la atención en diferentes representaciones de los materiales involucrados en la acción, y especialmente en discriminar las características esenciales y las no-esenciales de las mismas. Esto contribuye a la *generalización* de una acción, lo que representa el grado en el que las propiedades constantes y esenciales en la acción son aisladas de las no-esenciales y variables.

Por lo que toca a la *abreviación*, mientras la acción pasa por los tres niveles, el número de operaciones que originalmente eran parte de la acción se reduce, y la acción resulta *abreviada* al fusionarse algunas operaciones. De esta forma, la *abreviación* contribuye al dominio, la facilidad y velocidad de la acción.

Entre los años 50 y 80 del siglo pasado, Galperin hizo investigación implementando sus ideas en situaciones educativas, tanto a pequeña como gran escala. El formato común fue llamado *experimento de enseñanza* y consiste en elaborar el material de apoyo y los procedimientos necesarios para ejecutar una tarea específica; luego en poner a disposición este material para los alumnos, en guiarlos en el aprendizaje y en documentar sus progresos al resolver la tarea. En algunos casos los investigadores comparan la actuación de los estudiantes respecto a un grupo control no expuesto a la enseñanza organizada del modo descrito. El meollo de estos experimentos de enseñanza es la idea de la secuencia necesaria en las etapas de *internalización* de la actividad, y la gradual formación de acciones mentales.

Controlar el proceso de formación de los actos mentales asume que hay ciertas condiciones que provocan la formación de nuevos conocimientos y habilidades, es decir,



que hay parámetros necesarios para que estas sucedan (Koshmanova, 2007). Entre esas condiciones, Galperin señala la creación de una adecuada motivación, el mostrar una manera correcta de llevar a cabo la acción, desarrollar sus propiedades deseables, y encontrar la forma necesaria de la acción. La unificación de estas condiciones se llama la formación de la etapa. La teoría de Galperin ayuda a los estudiantes a desarrollar sus habilidades cognitivas al explicar cómo pueden aprender a ejecutar automáticamente esos actos mentales analizando, generalizando y evaluando productos basados en su actividad, como planear, escribir un texto, llevar a cabo un experimento, o desarrollar la atención o la memoria.

#### **II.4.5 Limitaciones del *método paso-a-paso de formación de acciones mentales***

Según Galperin (en Koshmanova), Vygotsky no logró un completo control sobre el proceso de formación de conceptos. El método de Galperin de formación por etapas de actos y conceptos, permite el control de la actividad cognitiva, y con esto acercase más al meollo de lo que es más propiamente psicológico. Él escribe que la formación por etapas de los medios de orientación abre el camino para la formación y el desarrollo de la vida intelectual. Basado en esta teoría, un profesor puede programar y controlar el proceso de enseñanza de ciertas habilidades; más aún, los estudiantes pueden regular su propia actividad, especialmente en la base de orientación de sus actos.

Sin embargo esta teoría es más valiosa desarrollando habilidades prácticas en los estudiantes que en desarrollar su vida espiritual. Aprendiendo ciertas nociones y habilidades, la teoría ha demostrado ser productiva, pero no es universal para todas las condiciones de aprendizaje. No se puede olvidar que el aprendizaje de un estudiante

desarrolla también sus emociones, actitudes y valores, y en la opinión de Koshmanova, la formación por etapas puede limitar la formación de diferentes funciones psicológicas. Para esta autora, la noción de *internalización* de Vygotsky es más profunda y más significativa que la de Galperin.

Para Vygotsky, durante el proceso de interacción social, los estudiantes internalizan no sólo visiones, sentimientos, emociones y actitudes, sino también las experiencias del profesor y de los compañeros. Y además, el proceso de *internalización* es diferente en cada persona, pues cada uno percibe la influencia externa a su manera, que es mediada por sus experiencias y especificidad psicológica.

## **II.5 La interacción didáctica estudiante-profesor en el escenario de actividad**

En Morge (2000) se estudian dos formas de interacción didáctica entre un aprendiz y un profesor, ambas con relevancia en la investigación de esta tesis: la *tutoría* y la *mediación*, que serán glosadas brevemente a continuación, y que provienen de un estudio de Weil-Barais y Dumas-Carré.

La interacción de *tutoría* concierne a situaciones de diálogo entre un profesor y uno o dos alumnos, el profesor guardando el dominio del saber y poniendo al alumno en conflicto con sus propias concepciones o conocimientos previos. Se caracteriza porque el profesor-tutor ejerce una acción sobre el alumno, le propone situaciones y preguntas, lo orienta en sus actividades, reduce el campo de alternativas, elimina progresivamente las dificultades y restricciones, le propone etapas intermedias y le ofrece explicaciones. En

suma, interviene sobre el alumno para hacerlo actuar y aprender. El *tutor* entonces enrola al alumno en la tarea, y le da información sobre sus errores; la *tutoría* corresponde más bien al modelado de conducta en el conjunto de guías operadas por el profesor.

En la interacción de *mediación*, el profesor juega el rol de intermediario entre los alumnos y el saber científico. La *mediación* tiene que ver más bien con la construcción de un conocimiento por negociación. En ella el profesor cuestiona las proposiciones del alumno, no las juzga, y le da la oportunidad de discutir la validez de sus propias decisiones. Interpreta las proposiciones de los alumnos tomando en cuenta su modo de pensar para preparar un terreno de discusión posible con ellos. En una referencia constructivista de la interacción, el mecanismo de progreso sería el conflicto cognitivo. El rol del profesor es de organizar el mundo físico al cual el alumno pueda acceder. Por sus preguntas, ayuda a la desestabilización que ayuda al conflicto y a la toma de consciencia en lo que toca a las cuestiones abordadas, los dispositivos experimentales, los procedimientos, los modelos explicativos, los sistemas de representación simbólica, las formas de causalidad así como las formas de intercambio entre personas. La *mediación* hace intervenir el conflicto socio-cognitivo al momento de los intercambios y debates con el alumno, haciendo al saber objeto de una co-construcción.

Los estudios de Weil-Barais y Dumas-Carré comentados en Morge (2000) muestran que en grados diversos según los momentos y las circunstancias, los profesores involucrados intervienen tanto en el modo de *tutela* como el de *mediación*. Hay por supuesto varios puntos en común en ambas interacciones, como el dar aliento al aprendiz, invitarlo a dar explicaciones y focalizar su atención. Pero en los mismos estudios se proponen tres criterios para diferenciar los tipos de interacción de cara a las transcripciones:

1) la repartición de la duración del discurso y el modo de tomar la palabra, 2) el tipo de guía ofrecida en las tareas complejas, y 3) la manera de tomar en cuenta de los errores del alumno, tal como lo consigna la Tabla 1 junto a los índices que caracterizan a cada uno.

Criterios	Tutela	Mediación
Repartición de la duración del discurso y el modo de tomar la palabra	<ul style="list-style-type: none"> <li>-la duración del discurso del profesor es muy superior a la del discurso de los alumnos</li> <li>-el profesor dice frases, los alumnos responden con palabras</li> <li>-sucede que el profesor deja frases incompletas que los alumnos deben completar (unidades, leyes, símbolos de una magnitud, resultado de un cálculo)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-la duración del discurso de profesor y alumnos es equilibrado</li> <li>-los alumnos tienen la posibilidad de hacer frases (aunque sean cortas)</li> <li>-el profesor retoma las expresiones de los alumnos con proposiciones de explicitación o de reformulación (<i>quieres decir que...entonces para ti...</i>)</li> </ul>
Guía en tareas complejas	<p>Las tareas que parecen muy complejas son recortadas en tareas intermedias más simples (aplicación directa del curso), todo acompañado de recordatorios: “<i>ya vimos en la clase que..., la ley a utilizar es...</i>”</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-el profesor da información previa para guiar un cálculo, permitiendo evitar ciertos errores (recordatorio sobre unidades, indicaciones sobre notación...).</li> </ul>	<p>Las tareas no son objeto de recortes impuestos ;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-el profesor pide a los alumnos explicitar “<i>¿porqué has tomado ese valor?...¿cómo lo hiciste..?</i>”</li> <li>-el profesor favorece eventualmente la interacción entre varios alumnos durante la realización de la tarea</li> </ul>
Toma en cuenta de los errores	<ul style="list-style-type: none"> <li>-el profesor corrige inmediatamente los errores, preguntando por la buena respuesta y/o una justificación: “<i>no, porque...no, recuerda que...no, ya hemos dicho que...</i>”</li> <li>-él rechaza o no toma en cuenta las respuestas incorrectas formuladas por los alumnos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-el profesor provoca la confrontación de respuestas a contradicciones individuales: “<i>pero entonces tú decías que...u otras proposiciones de los alumnos (redirigiéndose a la clase): ¿y ustedes qué piensan?</i>”</li> <li>-él toma en cuenta las proposiciones de alumnos formuladas aproximadamente y</li> </ul>

		negocia en relación a una respuesta aceptable científicamente
--	--	---

**Tabla 1.** *Criterios para diferenciar la interacción de tutoría de la interacción de mediación*

Las situaciones de interacción se oponen a las situaciones asimétricas donde los saberes y los asuntos son transmitidos en forma directa. La situación propuesta a los alumnos analizada del punto de vista de las interacciones, sean de *tutela* o de *mediación* no puede ser cualquiera; tiene que ser construida para permitir la interacción. La elección del *escenario de actividad* es un factor determinante, así como la elección de las restricciones y libertades dadas a los alumnos. En el caso de la investigación de esta tesis, la interacción profesor-alumno es detonada por las tareas o actividades pre-diseñadas usando los manipulativos virtuales y las preguntas-guía del profesor, pero también por las reacciones espontáneas del profesor en el devenir de la interacción con el estudiante que de todos modos corresponden a situaciones de *tutoría* o de *mediación*.

Por otro lado y aplicando otros criterios, se analiza tanto la función como la intensidad de tal interacción a través de la articulación hecha en esta tesis de indicadores provenientes de dos fuentes: por un lado por Galperin (en Arieievitch y Haenen, 2005) para la función, y por otro por Kuo, Chang y Wang (2002) para la intensidad de la interacción. La función de la interacción puede ser de orientación, de ejecución y de control, siendo la *tutoría* predominante en las fases de orientación y de control, y la interacción de *mediación* durante la ejecución. Por lo que toca a la intensidad de la interacción de mediación

exclusivamente en la fase de ejecución, esta puede ser suave, moderada o fuerte. Se glosarán estos indicadores a continuación.

La interacción de *orientación* (tutoría) se enfoca en dar al aprendiz las instrucciones y las condiciones de la tarea, así como la motivación y las pistas para poder ejecutarla.

La interacción de *mediación suave de ejecución* está centrada en inducir al aprendiz a supervisar sus respuestas y dar retroalimentación inmediata a sus acciones, estimulando con esto un comportamiento auto-regulado.

Si hay necesidad de mayor apoyo al aprendiz se activa la interacción de *mediación moderada de ejecución*, en la que se ofrecen ejemplos y se muestran estrategias útiles a la tarea para que el aprendiz las tome en cuenta y se decida por una de ellas por su cuenta.

Si aún se necesita más apoyo, se utiliza la interacción de *mediación fuerte de ejecución* en la que se muestra directamente la estrategia requerida y no encontrada por el aprendiz de manera a que pueda responder exitosamente a la pregunta o al problema planteado. En esta interacción el profesor debe asegurarse de que el aprendiz aplique esta estrategia, y de no hacerlo, de ofrecerle estrategias alternativas para que el aprendiz escoja aquella más cercana a su estilo cognitivo.

Por último en la interacción de *control* (de nuevo *tutoría*) el profesor deja que el aprendiz exprese verbalmente el proceso para solucionar el problema que está enfrentando, pero también lo deja analizar sus fallas y proponer formas de cambiar su accionar en consecuencia. El profesor también motiva al aprendiz a explorar las tareas en forma libre e independiente.

Estos indicadores permitirán dar un seguimiento denso al tipo e intensidad de la interacción profesor-alumno mientras esta ocurre, siendo una de las dimensiones de cambio observadas en el *escenario de actividad* estudiado en esta tesis, desde un punto de vista microgenético.

## II.6 La Derivada y sus objetos constituyentes como objeto de estudio

### II.6.1 Introducción

Los resultados de un gran número de investigaciones dedicadas a estudiar el desarrollo de conocimiento matemático en los estudiantes, particularmente universitarios, han hecho que actualmente sea un lugar común en educación matemática decir que en esta disciplina se requiere tanto de competencia operativa como de competencia conceptual, o en la forma detallada en que lo expresa el *enfoque onto-semiótico* de la didáctica de matemáticas, la disciplina requiere del dominio de lenguajes diversos, de operaciones, de argumentos, de proposiciones, de definiciones y conceptos relativos a problemas matemáticos, y no sólo de algunas definiciones y procedimientos algorítmicos. Es bien sabido el hecho de que el que un estudiante sea capaz de efectuar correctamente operaciones no implica que este haya comprendido el significado matemático, ni el reconocimiento de estructuras o la habilidad de interpretar resultados, pues en matemáticas es posible seguir las reglas operativas sin necesariamente poseer un gran desarrollo conceptual. En consecuencia, hay un énfasis en matemáticas hacia este entendimiento conceptual, y a que los estudiantes tengan oportunidades de desarrollarlo en la clase de Cálculo.

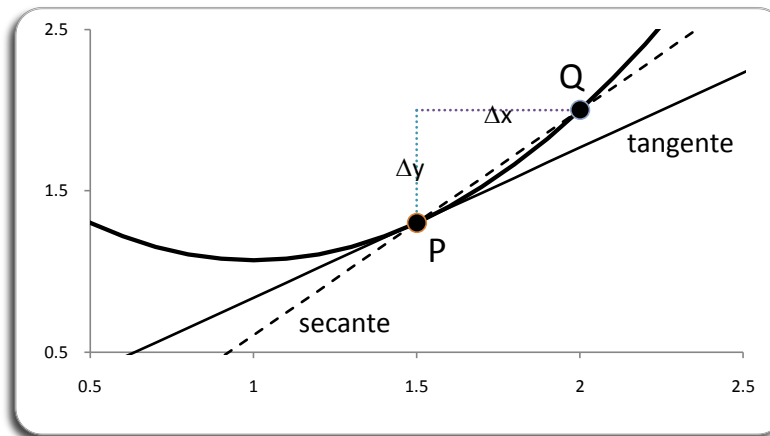
### II.6.2 Teoría elemental de la Derivada y de los objetos que la introducen

Se examinarán algunos conceptos y procesos asociados con la operación con la Derivada o *diferenciación*. De entrada hay que decir que el objeto matemático Derivada puede verse como constituido por otros objetos (Naidoo, 2007); por ejemplo, se la puede ver como una función (puesto que la Derivada es una *función que se deriva* de otra función original); también como un número si se evalúa esta función en un punto; como el límite de una secuencia de pendientes de un recta secante o como una razón de cambio. La *diferenciación* u operación con la Derivada asume que se ha entendido previamente el concepto de función y otros conceptos, lo cual es un hecho característico del saber matemático, que para cada concepto avanzado comúnmente se necesita la posesión previa de conceptos más elementales. Así, los estudiantes no pueden entender lo que es una ecuación diferencial ni su solución sin comprender previamente el concepto teórico de Derivada, y no sólo su parte operativa. A su vez, la Derivada se entiende muy difícilmente sin los conocimientos previos de álgebra, razones de cambio, límites y rectas tangentes, formando todos ellos una red conceptual. Además, hay siempre una diferencia entre la definición formal y el conjunto de imágenes y procesos cognitivos por los que esta definición es concebida. De ahí se explica la dificultad para captar el concepto de Derivada.

Muchos profesores intentan formar en sus estudiantes una adecuada idea de la Derivada, usada a menudo para poder describir características importantes de una función como sus valores máximo o mínimo, como el *gradiente* (velocidad con que cambia una variable dependiente respecto a la independiente) de la gráfica de la función o una curva. Esta interpretación es básica para entender el Cálculo, y esta idea depende de la idea de *pendiente* de una curva en un punto (Naidoo, 2007.). Convencionalmente, si tenemos dos



puntos  $P(x_1, y_1)$  y  $Q(x_2, y_2)$ , como lo muestra la *Figura 5*, la pendiente del segmento entre ellos está dado por  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  que es una proporción o razón de cambio de  $y$  con respecto a  $x$ .



**Figura 5:** aproximación al cálculo de la pendiente de la recta tangente a través de una recta secante

En la fórmula anterior,  $m$  representa la pendiente entre los puntos  $P$  y  $Q$ , es decir, la pendiente de la recta secante que pasa por ambos puntos, por lo que podemos expresarla como  $m_{\text{secante}}$ . Pero si nuestro interés es calcular el gradiente de la curva exactamente en el punto  $P$ , es decir, queremos calcular la pendiente de la recta tangente  $m_{\text{tangente}}$  a la curva por el punto  $P$ , una de las maneras de proceder es aproximar el punto  $Q$  al punto  $P$ , y calcular la razón de cambio correspondiente. Mientras más acerquemos el punto  $Q$  a  $P$ , mejor será la aproximación de  $m_{\text{tangente}}$ . Pero  $Q$  no puede coincidir con  $P$ , pues la diferencia nula de las  $x$  haría imposible el cálculo de  $m_{\text{tangente}}$ , la pendiente de la recta tangente identificada con la pendiente de la curva en el punto  $P$ .

La Derivada es definida justamente como el límite de la razón de cambios  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , en la que  $\Delta x$  tiende a 0. Entonces la Derivada es el gradiente de la curva en el punto P, y representa, como se ha dicho, la medida de la *razón instantánea de cambio* de y respecto a x en dicho punto. Por su parte, la *razón media de cambio*,  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , es importante en las aplicaciones de ingeniería, como en las pruebas de materiales hechas en laboratorio.

La notación formal para la Derivada expresada como el límite de una razón de cambio, es la siguiente:  $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Otra manera conocida de acercarse al concepto gráfico de Derivada es la empleada por David Tall (Tall, 1981), con la ayuda de la visualización que ofrece la computadora. En una curva, se toma un trozo de la misma que abarque al punto P, lo suficientemente pequeño como para considerar que el segmento es recto, no curvo. Esto equivale a hacer un zoom fotográfico alrededor del punto P. Luego se calcula el gradiente de esa *recta*, lo que descarga al estudiante, según Tall, de lidiar con los conceptos de secante, tangente y conceptos geométricos, mismos que podrían representar una sobrecarga cognitiva.

La aproximación usada en esta investigación es una combinación del primer acercamiento con las ventajas adicionales del segundo, a saber, la visualización y además la interactividad que proporcionan los manipulativos virtuales.

### II.6.3 Los objetos matemáticos que conforman al objeto Derivada

Se ha mencionado que es característico de las matemáticas el hecho de que la comprensión de un objeto matemático comúnmente depende de la comprensión previa de

otros objetos subsidiarios de aquel. La Derivada representa justamente uno de esos conceptos formados de otros previos, y es ella misma requisito para entender objetos más complejos. La primera noción sin la que difícilmente puede abordarse la Derivada es la noción de *función*, pues el nombre completo de la Derivada es *función Derivada*, obtenida o derivada de una función original o primitiva. Otra idea básica es la de *razón de cambio*, tanto *media* como *instantánea*. Entre ambas razones de cambio se halla la noción de *límite de una secuencia*. Cada uno de estos objetos interrelacionados con la Derivada conlleva dificultades epistémicas suficientes para ser objeto de investigación en matemática educativa, como de hecho ha sucedido.

La investigación de Naidoo (2007), basada en la comparación de los efectos de una enseñanza tradicional con los de una enseñanza mixta que hace uso de tecnología de geometría dinámica, analiza los *errores estructurales*, *ejecutivos* y *arbitrarios* para los objetos previos a la Derivada, para la Derivada, y para las aplicaciones de la Derivada en estudiantes que han completado un curso de Calculo Diferencial. La serie de objetos que analiza Naidoo ofrece un panorama y hasta una posible secuencia temporal del aprendizaje de los objetos que conforman a la Derivada, a saber: *límite de una sucesión*, *razón de cambio* en una línea recta, *razón de cambio* en una *curva*, *razón instantánea de cambio* en una curva, definición de *Derivada*, diferenciación como *límite*, y sus simbolismos. Esta secuencia será la base de la secuencia de tareas del estudiante en la presente investigación, acrecentada por objetos que son requisito de los mencionados, como *distancia entre puntos* alineados vertical y horizontalmente en un plano coordenado, y *pendiente* de una recta.

#### **II.6.4 Aproximaciones a la Derivada desde varios marcos teóricos**

En el artículo de Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008), se hace una revisión de las aportaciones de las investigaciones en Matemática Educativa en lo que respecta a la comprensión de la Derivada en un punto, el papel de los sistemas de representación y el desarrollo del esquema de Derivada desde teorías cognitivas (teoría *APOE* de Dubinsky; *concepto-imagen* de Tall), desde teorías de la *reificación* (de Sfard y Zandieh) y la *socio-epistemología* (de Cantoral y Farfán). En particular, esta última línea abandona el acercamiento a la Derivada a partir del límite del cociente de incrementos y de la explicación de la secante que deviene tangente, para adherir a la idea de que la Derivada no se puede entender sino como una organización de variaciones sucesivas, lo que implica acercarse a la Derivada en prácticas sociales de predicción en fenómenos de cambio.

Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) organizan su revisión alrededor de los puntos siguientes: errores y dificultades en la comprensión de la Derivada; relación de razón de cambio y cociente incremental; sistemas de representación como herramientas para pensar la Derivada; la relación de lo local a lo global, de la Derivada en un punto concreto a la función Derivada para cualquier punto; el desarrollo del esquema de Derivada; y la aplicación del concepto en la regla de la cadena.

En ese artículo se menciona la investigación de A. Orton relativa a la comprensión de la *razón de cambio* de una función, en la que este investigador encontró que el significado de dicha noción es dependiente del tipo de función, lineal o cuadrática, con la que trabaja el estudiante, presentando dificultades en el caso de la función cuadrática; la explicación de Orton a este hecho va en el sentido de que sus sujetos mostraban debilidad en el concepto de *función*; encuentra también la consabida dificultad en el manejo e

interpretación del límite del cociente de incrementos cuando uno de los incrementos tiende a cero.

Otra dificultad referida en el mismo artículo, estudiada por C. Azcárate, tiene que ver con el acercamiento que estudiantes de 15 y 16 años hacen a la Derivada sin poseer los conceptos previos de límite y continuidad, sólo desde la recta tangente a una curva en un punto. A través de cuestionarios y entrevistas, el estudio se enfocó en observar los errores, dificultades y esquemas conceptuales en los conceptos de *pendiente de una recta* y de *razón de cambio instantánea*, en el fondo, de cuantificar el cambio en el contexto de problemas de velocidad. Los estudiantes mostraron confusión entre la ordenada al origen y la pendiente de la tangente.

Del lado de la *teoría de reificación*, los estudios de M. Zandieh y A. Sfard (también en Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008), se enfocan a la interacción de los enfoques *operacional* (procesos, algoritmos) y *estructural* (objetos, conceptos) de un mismo objeto matemático. La interacción se da en la secuencia *interiorización-condensación-reificación*, en la que un *proceso* inicial se convierte en un *objeto* que será utilizado en otro proceso al lado de otros objetos previamente *reificados* (solidificados, cosificados). Sfard precisa que esta *reificación* es instantánea, e involucra un salto ontológico cualitativo, pues una misma cosa que es vista inicialmente de una manera, se ve luego con otro estatus distinto. Este proceso depende de los significados asociados a las diferentes representaciones de los objetos matemáticos. Por su lado, Zandieh hizo un seguimiento de nueve meses (setenta y cinco sesiones de clase) a unos estudiantes que estudiaban la Derivada; en el análisis de exámenes y en cinco entrevistas a nueve estudiantes, Zandieh fue monitoreando la construcción del significado de Derivada

siguiendo la metáfora de la formación de un rompecabezas, en la que el significado final depende del ensamblaje gradual de todas las piezas. Uno de sus resultados fue la constatación de que un proceso aprendido en un contexto no era transferido a otro contexto relevante de aplicación de la Derivada. Otras investigaciones consideran que la comprensión de un concepto matemático depende de la comparación de las definiciones del mismo obtenidas a través de representaciones distintas.

En esta última línea que relaciona conceptos con formas de representación está la investigación de Cobb, Wood, Yackel, Nicholls, Weatley, Trigatti y Perlwitz, y la de Habre y Abboud (siempre en Sánchez-Matamoros, García y Llinares). En ambas, se constata que estudiantes que pueden aplicar exitosamente criterios operacionales y gráficos de la Derivada, fracasan en el manejo de criterios de simbolización formal o conceptual, y también el caso contrario. La conclusión es que la falla está en la conexión débil entre aspectos procedimentales y conceptuales, o bien, que el significado que los estudiantes apropian depende de los tipos de representación predominante de la Derivada, mismos que pueden estar desconectados entre sí. En este sentido, la aportación de los manipulativos virtuales prediseñados puede ser significativa, pues presenta en una misma pantalla formas semióticas diferentes de un mismo objeto matemático. La investigación de Aspinwall, Shaw y Presmeg (1997, en Sánchez-Matamoros, García y Llinares) da cuenta de un estudiante, Tim, que dominaba las reglas para hallar la Derivada y se inclinaba por utilizar apoyo visual para resolver problemas, pero en un problema en que debía construir la gráfica de una función polinómica de segundo grado, colocó asíntotas (que ese tipo de función no tiene), influido por el aspecto de la gráfica de otro tipo de funciones. Esto muestra cómo las imágenes mentales sin comprensión profunda asociadas a cierto tipo de funciones,

condicionan u obstaculizan la actuación del estudiante a la hora de enfrentar otras funciones o resolver problemas aplicados. Esta investigación llama también la atención hacia la elección del tipo de representaciones que utilizan los profesores para introducir la Derivada, y de la coordinación que pueden establecer entre ellas.

Otras investigaciones desde el *enfoque onto-semiótico* de la didáctica de matemáticas, que incluye aspectos antropológicos, semióticos y cognitivos, se realizan en el sentido de lograr la coordinación entre formas de representación de los objetos matemáticos, como la de Contreras y Font (2002), y en específico para la Derivada, como la de Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2005). Esta coordinación, que trata de enfrentar la complejidad semiótica de los objetos que constituyen la Derivada, se toma como signo de su comprensión. En la segunda investigación, se alude a tres formas de aproximación a la derivada: mediante la definición por el límite  $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ; la segunda, hallando una condición que cumplan todas las tangentes con la ayuda de un programa gráfico como *Cabri Géomètre*, y a partir de ella, calcular la Derivada; esto implica el conocer antes otros conceptos, y está limitada a estudiar una función a la vez; y la tercera, calcular la Derivada por medio de valores de esta en diversos puntos dados en una tabla. El primer método es el que normalmente se utiliza en la escuela, el que tiene una mayor complejidad semiótica, y el más general de los tres. El análisis de los hallazgos en las tres técnicas, conduce a los autores a inferir que el cálculo de la Derivada pasa por traducir y convertir entre diferentes formas de representar la función  $f(x)$ ; luego por pasar de formas de representar  $f(x)$  a formas de representar la Derivada  $f'(x)$ ; y finalmente traducir y convertir en distintas formas de representar  $f'(x)$ . Esto puede concretarse en diferentes maneras de hallar la Derivada según los ostensivos utilizados. Otras

investigaciones (Badillo, 2003) concluyen que el concepto de Derivada en un punto  $f'(a)$  no garantiza el paso a la comprensión de la Derivada en un punto genérico  $f'(x)$ , es decir, que de *lo local* no se pasa fácilmente a *lo global*. Este paso, crucial para la comprensión de Derivada, no está suficientemente investigado.

Por su lado, David Tall (Tall, 1996, 1998), explica el rol de la visualización y la simbolización como herramientas mediadoras de la abstracción matemática, desarrollando los tres tipos de representación que había propuesto Bruner, enactiva, icónica y simbólica, y adaptándolos al cálculo infinitesimal. Tall propone representaciones enactivas (acciones humanas que den sensación de cambio o velocidad); representaciones numéricas y simbólicas (pueden usar la computadora); representaciones visuales (con programas de geometría dinámica); y representaciones formales. Para Tall, los símbolos comprimen la información que portan, y son los instrumentos idóneos para *encapsular* los *procesos matemáticos en objetos matemáticos*.

Investigaciones desde la postura piagetiana, como la de Trigueros (2005) y Cooley, Trigueros y Baker (2007), exploran la formación del *esquema* para la Derivada y en lo general en estudiantes que han concluido ya cursos de Cálculo Diferencial. Mediante problemas intencionalmente formulados, como los que diseñó Sfard en sus investigaciones, estudian la dinámica en la que un proceso se encapsula en un objeto y se combina con otros objetos y procesos para poner en relación el concepto de primera y segunda Derivadas, así como sus interpretaciones gráficas y formulación simbólica. Este interesante enfoque no presenta sin embargo un apoyo para la presente investigación porque está situado en el extremo opuesto de la formación desde el principio de esas relaciones, y se dedica a observar a estudiantes que han concluido ya sus cursos de Cálculo.



La tesis de Hyer (2007) estudia la aproximación de un solo estudiante a la Derivada. En ella se enfatiza el papel fundamental de la visualización en el aprendizaje conceptual del Cálculo, tomada como una forma de representación que traza el mapa de un dominio desde otro dominio, preservando su estructura. Entender cómo los estudiantes crean y usan representaciones de ideas matemáticas da luz sobre la imagen que se forman de ellas. La visualización unida a la computación, ha sido explotada desde los años 80 del siglo pasado para acercarse a las matemáticas en la forma de visualizar gráficas, analizar movimiento y cambios en las funciones, pero actualmente se quiere ir más allá de la sola imagen visual y se pretende estudiar también las imágenes mentales, el lenguaje y los gestos asociados a dicha imagen. Dado que no hay acceso directo a las imágenes mentales creadas por el estudiante, lo que se analiza es su discurso, gestos manuales, producción escrita o dibujos para determinar cómo usa la visualización en el proceso de aprendizaje.

Las representaciones de la Derivada involucra a las representaciones de *razón de cambio*, *límite* y de la propia Derivada. Zandieh (2000) desarrolló un marco para estudiar la comprensión de la Derivada en estudiantes, que incluye cuatro categorías de representación: 1) *gráfica*, como la pendiente de la recta tangente a una curva o como la de una recta magnificando la zona de tangencia; 2) *verbal* como razón instantánea de cambio; 3) *física* como velocidad; y 4) *simbólica* como el límite de un cociente de incrementos. Puede haber combinaciones y variaciones de estos elementos. Sin embargo los estudiantes pueden usar estas representaciones sin necesariamente entender el proceso relativo al objeto Derivada, caso en el que esta tiene categoría de pseudo-objeto según Vygotsky. Para lograr el entendimiento de la Derivada, los estudiantes deben *reificar* (solidificar, cosificar) cada uno de los objetos relacionados, a saber, Función, Pendiente, Razón de Cambio y Límite. El

*proceso* de encontrar la razón de la variación vertical sobre la horizontal entre dos puntos debe *reificarse* para manejarse como un *objeto* a usar en el proceso de límite en el que la distancia entre dos puntos es más y más pequeña. Después de encontrar ese límite, se *reifica* su proceso para usarlo como objeto en el proceso de hallar valores de la función Derivada, y así sucesivamente (Zandieh, 2000).

Por lo que toca al objeto *Límite*, hay problemas para conceptualizarlo debido a que el tipo de discurso en el aula introduce la idea de que es un valor al que uno se aproxima sin jamás alcanzarlo, generando confusión y ambigüedad, sobre todo al momento de enfrentar la definición formal de límite llamada *definición delta-epsilon*, y su aplicación. Varios autores piensan que el concepto de *límite* no puede formarse en su aspecto maduro en forma inmediata, y que debe haber experiencias complementarias que ayuden a conceptualizarlo en forma completa.

La misma autora (Zandieh, 2006) investiga el rol que la *metonimia* puede tener en la conceptualización profunda, es decir, la sustitución del nombre de un objeto cercanamente asociado con una palabra, por la palabra misma. Cuando una parte del objeto se usa para sustituir al objeto, tenemos una metonimia parte-todo. Por ejemplo, decir *la corona* para referirse a un *rey*, o *almas* para referirse a *personas*. Los usuarios de las matemáticas aplican ese tipo de metonimia, como cuando la Derivada se expresa como velocidad instantánea. Esto puede ser bueno en algunas situaciones pero también esconder una carencia de entendimiento en otra, como es el conocido caso de la *compartimentalización* según el contexto que impide relacionar una manera de usar la Derivada con otras. Es común usar el término corto *Derivada* tanto para la *función Derivada* como para el *valor* de la *Derivada* en un punto de la función, lo cual puede acarrear problemas de entendimiento.

En resumen, hay metonimia positiva y negativa; por ejemplo referir la Derivada como *la pendiente* o como *la razón de cambio* es metonimia positiva y referirla como *la recta tangente* o como *el cambio*, es negativa (Zandieh, 2006). Pero no se garantiza que aquel que usa metonimia positiva pueda dominar el proceso completo de la aplicación de la *Derivada*.

La investigación de Bezuidenhout (1999), hecha desde el marco constructivista piagetiano, explora las concepciones (*concept-image*) de los objetos *razón de cambio media* e *instantánea* en estudiantes de primer año universitario que ya han completado el curso de Cálculo, a través de pruebas y entrevistas basadas en tareas. Se menciona un caso en el que en la base de las concepciones erróneas de los estudiantes a menudo está la interferencia con la imagen de otros objetos matemáticos construidos previamente. Es el caso de la *razón media de cambio*, cuya aplicación en las pruebas se extravió por la interferencia de los objetos previos *media* y *valor medio de una función continua*. La concepción errónea de un objeto matemático puede impedir u obstaculizar la construcción de objetos más sofisticados o relacionados. A la vez, el conocimiento de estas concepciones erróneas permite enfocar la enseñanza con un conocimiento mayor de los riesgos, y con esto mejorar el aprendizaje.

Por su parte, Estrada-Medina y Arenas-Sánchez (2006), estudiaron la construcción del concepto de *razón de cambio* y su relación con la acumulación de una cantidad a través de un simulador de flujos en un tanque de agua. El simulador de esta situación dinámica mostró tener potencial para construir esa relación y con ella, el entendimiento conceptual que involucra a estos dos conceptos.

## **II.7 Fundamento teórico para caracterizar las prácticas culturales acerca de un objeto matemático: el enfoque onto-semiótico de la didáctica de las matemáticas**

Uno de los elementos del modelo de actividad mediada por instrumentos y otros mediadores, como lo pueden ser los textos o el profesor, es justamente el *referente* de tal mediación, que en esta tesis es el significado de los objetos matemáticos que introducen a la *Derivada*. La cuestión de la naturaleza del significado de un objeto matemático puede darse con ventaja desde el enfoque onto-semiótico de la didáctica de las matemáticas, de Godino (Godino, 2003; D'Amore y Godino, 2007), enfoque que engloba elementos de los enfoques *psicológico*, *antropológico* y *semiótico*, y que centra su atención en determinar la naturaleza de los objetos matemáticos (la parte ontológica) y las relaciones expresión-contenido intra e inter-objeto (la parte semiótica). Aunque el enfoque tiene una postura epistemológica afín a la postura histórico-cultural, no hay posibilidad de interferencia o conflicto entre ellas dado que el enfoque onto-semiótico interviene en esta tesis únicamente para caracterizar al repertorio de prácticas culturales alrededor de los objetos matemáticos meta, pero tales prácticas pretenden alcanzarse a través de dinámicas histórico-culturales.

### **II.7.1 Perspectiva pragmática del conocimiento matemático: significado institucional y personal de los objetos matemáticos**

Es indispensable en los enfoques *antropológico* y *semiótico* a la didáctica de las matemáticas, afluentes del *onto-semiótico*, la aclaración de lo que es el *significado* de un objeto de aprendizaje, que históricamente se ha movido entre dos posturas: la *realista* y la *pragmática* (Godino, 2003). El significado *realista* es una relación entre un signo y una entidad concreta o ideal que existe independientemente del signo lingüístico, lo que supone

un realismo conceptual. El uso de un signo lingüístico depende de su significado *per-se*, no de su aplicación en situaciones concretas, es decir, que la semántica está completamente separada de la pragmática. Esta posición *realista* se corresponde con una visión científica donde podemos observar el mundo *objetivamente*. Las matemáticas serían un cuerpo de ideas platónicas, seguras y eternas, independientes de los seres humanos, y conocer sería descubrir esos entes y sus relaciones.

En contraste, la postura *pragmática* atribuye significado a un signo según el contexto donde se esté usando, haciendo que el conocimiento sea relativo y contextual, dependiendo del uso que se le esté dando al signo, o según al *juego de lenguaje* donde participa: una palabra no tiene por sí misma un significado, sino que es significativa contextualmente, como dice Wittgenstein. Los objetos matemáticos, siguiendo esta línea de pensamiento, serían aquí herramientas culturales que emergen de la práctica humana, postura que resulta más cercana a la evidencia empírica de la actividad matemática.

Los actos semióticos son actos de significado, y este puede construirse a través de modalidades semióticas distintas en las que el lenguaje es sólo una de ellas, aunque en el discurso de Vygotsky (1978) sobre mediación semiótica, hay que leer mediación por medio de signos lingüísticos.

La postura pragmática abreva en las ideas del lógico y filósofo pragmático Charles S. Peirce, uno de los fundadores del pragmatismo y de una escuela de la semiótica, quien presenta una teoría innovadora del significado. Como señala Elizondo (2003), traduciendo textualmente a Peirce:

*Para desarrollar el significado de una cosa, por tanto, no tenemos más que determinar qué hábitos produce, ya que lo que una cosa significa equivale a los hábitos que comporta. Debemos descender a lo tangible y (concebible) práctico para encontrar la raíz de toda verdadera distinción de significación, por sutil que sea; y no hay ninguna distinción de significado, por afinada que sea, que pueda consistir en otra cosa que una posible diferencia práctica... (Elizondo, 2003, 53).*

Debajo de esta idea de significado está una idea también innovadora de pensamiento, como señala Elizondo, de nuevo citando a Peirce: *la totalidad de la función del pensamiento es producir hábitos de acción* (Elizondo, 2003, 52), que si son auto-controlados se llaman *creencias*. Es necesario aquí aclarar el significado de los términos *creencia* y *hábito de acción* para entender cabalmente esta idea. Para Peirce, la *creencia* es algo de lo que tenemos conocimiento, que desplaza el sentimiento de duda e implica el establecimiento de una *regla de acción* o *hábito*. A su vez, un *hábito* es un actuar de cierta manera en determinadas circunstancias y por un motivo dado, y un *hábito* auto-controlado o deliberado es una *creencia*. Un ejemplo de *hábito* es aquello que permite hacer una inferencia a partir de premisas dadas. Para Peirce es imposible tener en la mente una idea que no tenga que ver con los efectos sensibles de las cosas. Así, la concepción o intención racional de una palabra o proposición, está solamente en sus repercusiones en la conducta de vida o en sus efectos prácticos. Esta es la máxima pragmática, de la que Peirce se encarga de aclarar que no debe tomarse de manera individual o aplicable a la experiencia de un solo hombre, sino de forma colectiva. El fin de los hábitos tampoco es individual, sino que los fines individuales sólo son destellos del fin que las generaciones van elaborando.

Esta última idea de Peirce tiene nexos con el pensamiento *histórico-cultural* de Vygotsky, aunque también comporta una diferencia importante en cuanto a la relación aprendizaje-desarrollo mental, que ha sido tratada en el apartado *Aprendizaje y desarrollo en la teoría de Vygotsky*.

Por otro lado, el enfoque antropológico contempla a la actividad matemática como una actividad humana y de instituciones sociales. Chevallard (2003), su máximo representante, define *objeto matemático* como algo que emerge de un sistema de prácticas donde se manipulan diversos registros semióticos, palabras, signos, gráficas, gestos, cálculos. O sea, objeto matemático es todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas. Los tipos de objetos matemáticos son: lenguajes de representación, conceptos, operaciones, problemas, proposiciones y argumentos.

El objeto existe desde que un individuo o una institución reconocen su existencia, y no antes. El sistema de prácticas donde se lo usa se ha llamado en este enfoque *praxeología matemática*, lo que la comunidad de usuarios hace a propósito de ese objeto desde un punto de vista institucional, no a nivel del sujeto particular. Eso pareciera chocar con la visión constructivista radical, que no asume un saber ideal fuera de la mente humana, aunque esto queda matizado por el hecho de reconocer que la institución está formada por un grupo de sujetos en quienes la sociedad reconoce el dominio de una práctica. Por otro lado, hablando de matemáticas, una institución puede ser la de los sabios, otra la de la escuela, y otra la del trabajo, cada una usando las matemáticas con su propio juego de lenguaje.

El *constructivismo social* comparte la aproximación pragmática a los objetos matemáticos como entes emergentes de un sistema de usos ligados a la solución de problemas, que además están en evolución. Los objetos matemáticos no pueden reducirse sólo a su definición formal.

El enfoque *onto-semiótico de la didáctica de matemáticas* (Godino, 2003; D'Amore y Godino, 2007), articula la aproximación antropológica y semiótica además de la psicológica, y parte del mismo supuesto pragmático del significado de los objetos matemáticos, supuesto establecido años atrás por Ullmann (en Godino, 2003), un autor clásico de semántica, quien no contrapone las aproximaciones *realista* y *pragmática* (*referencial* y *operativa*, como las llama), sino que las considera complementarias, tal como se da en el fenómeno del habla y del lenguaje. Llevando esta idea a las matemáticas, el significado de un objeto puede comenzar siendo pragmático, relativo al contexto, y el proceso de enseñanza y aprendizaje escolar lo aproximará al campo referencial a través del léxico institucional, para complementar el significado del objeto. Esta idea de Ullmann es paralela a la discusión que se hace en otros lugares de la tesis en lo que concierne a la postura dialéctica que confronta a las dicotomías *externo-interno* y *concreto-abstracto*.

De esta forma, el significado de un objeto sería el *sistema de prácticas culturales* que se hace a propósito de tal objeto. Por ejemplo, el significado de la Derivada es el conjunto de todo lo que se hace y se dice a propósito de problemas de Derivada. Pero el enfoque *onto-semiótico* distingue entre las prácticas que hace un individuo, llamadas significado personal, de las prácticas que hace una institución (la escuela, el gremio de ingenieros o el de matemáticos), llamadas prácticas institucionales. Esta distinción va más allá del interés puramente institucional que hace el enfoque antropológico.



### II.7.2 Componentes del significado

El significado de un objeto tiene una serie de componentes, que también son objetos ellos mismos, bajo la definición de *objeto* como todo aquello que es indicado, señalado o nombrado mientras se construye, comunica y aprende matemáticas. En el caso de objetos matemáticos, los componentes (objetos elementales) típicos son, según Godino (2003) y D'Amore y Godino (2007):

- *lenguajes* de representación (verbal, gráfico, numérico, algebraico, gestual);
- *situaciones* (problemas extra o intra matemáticos);
- *algoritmos* (en la formulación de Godino son *acciones* y *operaciones*, siendo algoritmo sólo las segundas, pero evitaremos la confusión con los conceptos de *acción* y *operación* en la teoría de la actividad en Leontiev);
- *conceptos* y *definiciones* involucrados;
- *propiedades* o *atributos* de los conceptos: son las condiciones de realización de las acciones o características específicas de las situaciones y relaciones entre objetos; y
- *argumentos* de validación: los más usuales son de tipo deductivo, pero puede haber contraejemplos, generalizaciones, análisis, síntesis, simulaciones computarizadas y demostraciones informales o suaves. Hacen uso de lenguajes, convenios, definiciones y proposiciones.

Estos objetos componentes están interrelacionados en una *configuración*, y esa red de relaciones entre componentes constituye el significado del objeto. Los seis componentes referidos arriba son elementos de otros objetos más complejos como teorías o sistemas

conceptuales. Las entidades lingüísticas en particular, tienen un doble papel: por un lado *representacional* (se ponen en lugar de los otros componentes), y por otro *instrumental* (son instrumentos de la actividad matemática).

Dichos componentes ya habían sido de alguna manera sugeridos años atrás por Duval bajo el nombre de *funciones discursivas* tales como las funciones *referenciales* (para la designación de objetos), *apofánticas* (para las proposiciones entre objetos), *expansivas* (que desarrollan secuencias de proposiciones en una forma coherente), y *reflexivas* (que dan un estatus de valor a las proposiciones), acompañadas de una multitud de sub-funciones de acuerdo al objeto estudiado. Estas funciones van acompañadas siempre en el discurso matemático por formas semióticas, como el lenguaje algebraico o el gráfico.

### II.7.3 Funciones semióticas

De la semiótica de L. Hjemslev y de la de Umberto Eco (en Godino, 2003), el *enfoque onto-semiótico* toma la noción de *función de signo* y *función semiótica* respectivamente (aunque son equivalentes), que no es otra cosa que la relación expresión-contenido entre dos o más componentes del significado, digamos, entre un concepto y su representación gráfica o entre esta y la expresión simbólica relacionada, o entre un algoritmo y un argumento de validación. Esta relación la establece un sujeto o institución, completando la triada semiótica *signo-objeto-interpretación*. El significado de un objeto matemático como la Derivada sería entonces el conjunto de *funciones semióticas* que pueden establecerse entre todos los componentes de tal significado, que puede ser, como se ha dicho, institucional o personal, implicando en correspondencia las dimensiones epistémica o cognitiva. El significado institucional de referencia o sistema de prácticas de

la institución, no es comúnmente el sistema de prácticas escolares tal cual, sino que hay una necesaria selección de elementos adaptados a los objetivos de un sistema o nivel educativo o región o escuela, de tal forma que puede hablarse de un *significado local pretendido*. A su vez, puede haber un desfase entre tal significado y lo que realmente se maneja en el aula (*significado institucional implantado*), y aún entre este último y lo que en verdad se evalúa en los estudiantes (*significado institucional evaluado*).

En cuanto a los significados personales, es decir, los relativos al sujeto, Godino (2003) propone varios tipos; el *significado personal global*, que corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático; el *significado personal declarado*, que da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las evaluaciones propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional; y el *significado personal logrado*, el que corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida.

Una *función semiótica* surge cuando entre dos objetos ostensivos o no-ostensivos se establece una dependencia expresión-contenido. Esta dependencia puede ser de uno de los tres tipos siguientes (D'Amore y Godino, 2007): *representacional* (uno de los objetos se pone en lugar de otro para un cierto propósito); *instrumental* (un objeto usa a otro u otros como instrumento); y *estructural* (dos o más objetos componen un sistema del cual emergen nuevos objetos). Esta noción de *función semiótica* traduce la naturaleza eminentemente relacional de las matemáticas, y permite por un lado expresar el conocimiento matemático en forma de relaciones puntuales, pero también explicar las

dificultades de los estudiantes en términos de conflictos semióticos también puntuales y por tanto localizables, aislables y susceptibles de remedio.

En cada contexto específico o situación problemática se tendrá una *configuración* o red de objetos intervinientes y emergentes en la actividad matemática. Hay *configuraciones epistémicas* (redes de objetos institucionales) y *configuraciones cognitivas* (redes de objetos personales) con las cuales expresar el significado institucional y personal.

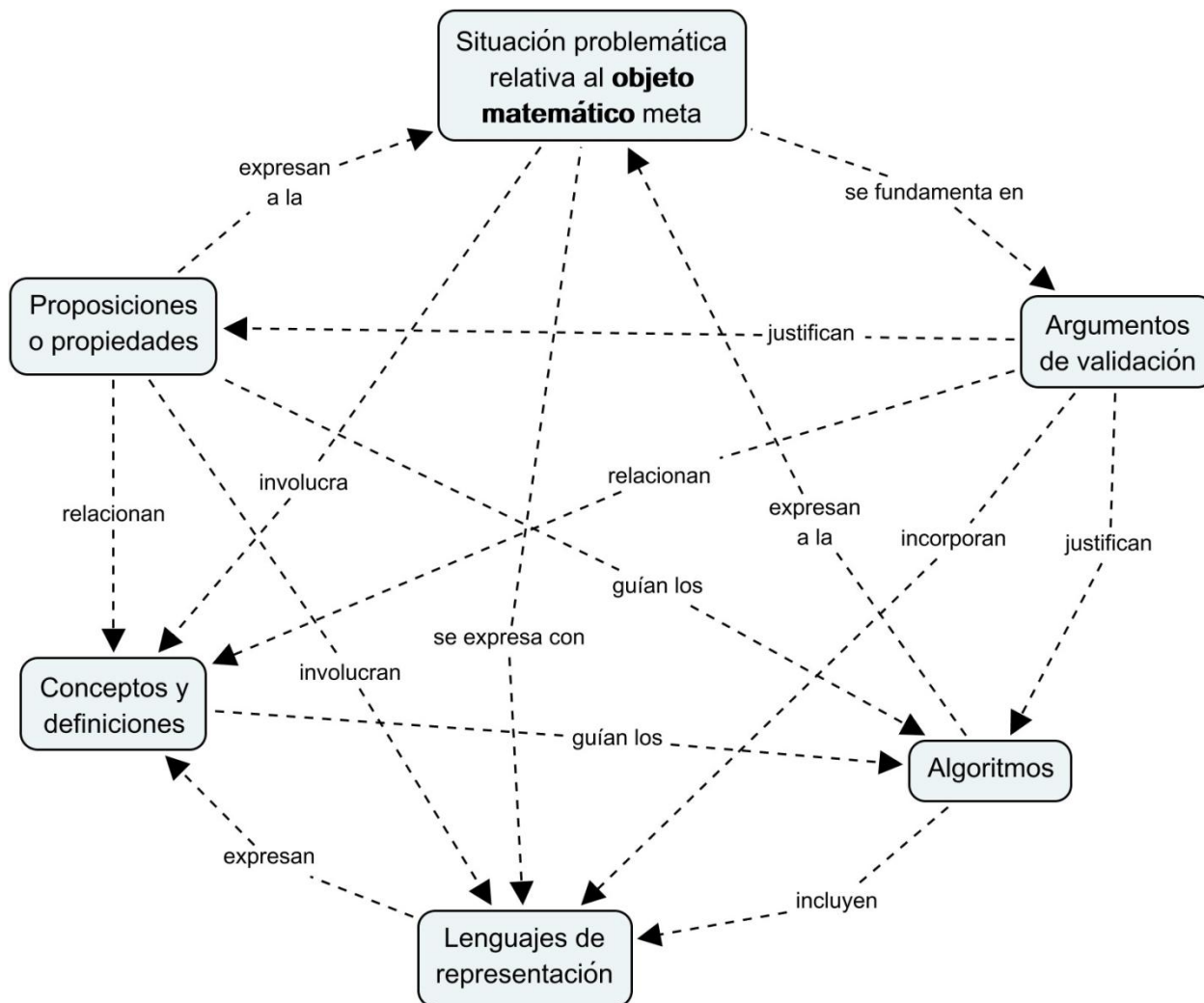
De esta forma, una vez establecidas las *funciones semióticas* de referencia, es decir fijado el significado institucional, el análisis de los resultados de la mediación de los manipulativos y del discurso del profesor, se hará también a través de las *funciones semióticas* realmente movilizadas por el estudiante, comparándolas contra las de referencia o pretendidas.

Una de las hipótesis de trabajo de esta investigación, es que las *funciones semióticas* que constituyen el significado de los objetos matemáticos, pueden ser abstraídas e internalizadas por el estudiante a través del intercambio discursivo con el profesor en torno a la acción con manipulativos virtuales prediseñados que ofrecen dos elementos importantes: la posibilidad de contar con recursos visuales, y la interactividad que permita al estudiante controlar los cambios en la animación interactiva y poder extraer de esos cambios o bien un patrón de comportamiento, o bien nociones e imágenes visuales no formalizadas de un determinado objeto matemático. O aún mejor, que el estudiante caiga en cuenta de la relación entre dos o más componentes del significado de ese concepto.

El producto o residuo de la actividad mediada puede caracterizarse justamente con las *funciones semióticas personales* que traducen dicho significado. Cada *función semiótica*

surge de un acto de *semiosis* (atribución de significado a un signo o grupo de signos) por parte de un agente interpretante, y forma un conocimiento.

Se presenta a continuación la *Figura 6* que ilustra la configuración de objetos y sus relaciones o *funciones semióticas* establecidas entre los componentes del significado de un objeto matemático meta en una situación problemática. Este objeto es conformado a su vez por otros objetos.



**Figura 6.** El significado pragmático de un objeto matemático

## II.8 Fundamento teórico para caracterizar al instrumento.

### II.8.1 Los manipulativos virtuales en el aprendizaje de matemáticas.

Según Moyer, Bolyard y Spikell (2002), un *manipulativo virtual* es una representación visual interactiva de un objeto dinámico que presenta una oportunidad para construir conocimiento matemático, por lo general en la Web. En esta pueden encontrarse objetos estáticos y dinámicos, pero los estáticos, usados ampliamente en textos y también en la Web, no son realmente manipulativos virtuales. Estos se distinguen porque el usuario o aprendiz construye significados por su cuenta usando el *mouse* (ratón) de la computadora para controlar acciones físicas relativas a los objetos moviéndolos, volteándolos o rotándolos, a diferencia de los casos en los que la acción con el ratón sólo sirve para encontrar una respuesta en forma visual o simbólica.

Los manipulativos virtuales pueden tener características únicamente pictóricas, o combinar lo pictórico con imágenes numéricas, y pueden contener simulaciones o tutoriales de conceptos con instrucciones y retroalimentación. Comúnmente los manipulativos virtuales se modelan según los manipulativos de materiales concretos como los *tangramas*, construcciones con bloques o figuras geométricas sólidas, y generalmente se confeccionan en su versión virtual en *applets* (pequeñas simulaciones que pueden incluir interactividad) en Java o Flash. También se pueden diseñar en hojas de cálculo interactivas en Excel, una aplicación de acceso general y que no depende de la conexión a Internet, que cuando falla o tarda mucho tiempo en descargar el *applet*, genera problemas y frustración en el aula. El objetivo de estos manipulativos generalmente está conectado a los objetivos o estándares del aprendizaje escolar, en especial cuando se privilegia el descubrimiento y la

investigación por parte del estudiante, o se quiere solidificar un concepto. En ocasiones se usan primero manipulativos concretos y después los virtuales (Moyer-Packenham, Salkind, y Bolyard, 2008). Según estos mismos autores, los manipulativos virtuales proveen una herramienta adicional para ayudar a los estudiantes a desarrollar pensamiento relacional y a generalizar ideas matemáticas, aunque sabemos que cada persona tiene una forma única de aprender. Los *applets* pueden contener una combinación de elementos visuales, verbales y numéricos. La habilidad de combinar y manipular representaciones múltiples en un ambiente virtual, permite a los estudiantes desarrollar conceptos y probar hipótesis, además de poder enfocarse en estrategias de solución de problemas, no sólo a los cálculos mismos. Los manipulativos virtuales proveen ambientes interactivos en los que el estudiante puede hacer conexiones entre conceptos y operaciones matemáticas, teniendo retroalimentación inmediata de sus acciones que lo deben conducir a reflexionar en la conceptualización (Durmus y Karakirik, 2006).

Según Matawa (1998), los *applets* (que pueden contener manipulativos) pueden usarse para:

- Generar una gran variedad de ejemplos de un concepto sin necesidad de mucho espacio. Los ejemplos serían la base sobre la cual lograr una abstracción y de ella una generalización y un concepto, como se ha discutido en el apartado anterior.
- Ofrecer la posibilidad de que el aprendiz haga ejercicios simples para asegurar el entendimiento de un concepto o definición.
- Generar datos que el estudiante puede analizar para hacer conjeturas razonables basadas en ellos.



- Guiar al estudiante a través de una secuencia de pasos que se desarrollan mientras *corre* el *applet*.
- Presentar demostraciones matemáticas gráficas a través de animaciones que no se pueden hacer sin la computadora.
- Retar al estudiante a desentrañar o explicar el funcionamiento matemático implícito en el *applet*, lo que también puede desarrollar habilidades de solución de problemas.
- Ilustrar aspectos cada vez más complejos de un mismo objeto a través del tiempo o a lo largo de un curso.

Para usar con efectividad los manipulativos virtuales en el aula, los profesores deben entender cómo usar las representaciones en la enseñanza matemática, y también cómo estructurar el proceso de aprendizaje de estudiantes usando computadoras. A la vez, el profesor debe sentirse cómodo con la computadora y saber manejar situaciones en las que no puede contar con ella, o falla la conexión a Internet en el aula, o el *applet* tarda mucho tiempo en ser descargado. Y aún, debe enfrentar el caso de alumnos que tienen problemas para manipular los objetos virtuales, y casos en los que el alumno se concentra en el manipulativo y no en la matemática a la que es dirigido.

Existe otro factor importante a tomar en cuenta al usar manipulativos, y es la edad o nivel escolar del usuario, pues se sabe que los niños pequeños necesitan actividades manuales además de virtuales para desarrollar ciertas habilidades.

Para Durmus y Karakirik (2006), es necesario diseñar manipulativos matemáticos enfocados en conceptos específicos, pero sin olvidar que la finalidad primera de la educación matemática no es promover una práctica matemática eficiente con la ayuda de la

computadora, sino ayudar en la trasmisión de una *cultura matemática* haciéndola lo más transparente posible.

### **II.8.2 La noción de *lo concreto* en relación a los manipulativos virtuales**

La noción de *lo concreto*, como cuando se mencionan los *manipulativos concretos* o en la secuencia pedagógica que va *de lo concreto a lo abstracto*, está ampliamente presente y aceptada en la teoría, la práctica y la investigación educativa, y en forma especial en la educación matemática (Clements, 1999), tal como se ha discutido en el apartado de las consideraciones epistemológicas. El asunto de *lo concreto* se vuelve menos claro o polémico si los manipulativos con los que se trabaja se ofrecen en la computadora, donde además, a veces lo que se manipula no son representaciones de objetos concretos, sino representaciones semióticas de objetos matemáticos como es el caso de los manipulativos usados en esta tesis. Por esta razón se hace necesario hacer una reflexión adicional acerca de lo que hay de *concreto* en los manipulativos virtuales.

Aunque existe investigación que demuestra que los estudiantes de todo nivel que usaron manipulativos presentan ventajas en rubros como la retención o la solución de problemas (Moyer-Packenham, Salkind y Bolyard, 2008), no puede decirse que el uso de manipulativos garantice el buen éxito de la actividad de aprendizaje, pues en ocasiones los estudiantes los usan de memoria, o el uso deriva en resultados inesperados o indeseados por el diseñador o profesor. Los profesores que usan los manipulativos como una manera de transformar su práctica, a menudo no reflexionan sobre los aspectos de su trabajo que deben cambiar en consecuencia, y caen en el estereotipo en el que lo concreto es bueno y lo abstracto es malo para el aprendizaje (Clements, 1999), cuando en realidad ambos

elementos están dialécticamente conectados y se enriquecen mutuamente. En resumen, aunque la investigación pasada sugiere que la instrucción comience desde lo concreto, los manipulativos pueden no ser suficientes para garantizar aprendizajes significativos. Para esto es necesario redefinir la noción de *lo concreto*.

En general, profesores e investigadores atribuyen efectividad a los manipulativos justamente por ser *concretos*, en el sentido de ser cosas de naturaleza sensible que el estudiante puede tener en las manos, lo que lo conecta con el mundo real y con la intuición o significación directa de las personas. Pero esta manera de ver las cosas presenta problemas, pues no se puede asumir que los conceptos se obtengan en forma directa de los manipulativos, como se ha discutido. Los profesores que usan manipulativos con sus alumnos para que estos aprendan las primeras operaciones aritméticas, lo hacen porque estos manipulativos funcionan en forma coherente con el funcionamiento de los números; pero esta coherencia es captada por los profesores, no por los alumnos. Si estos no saben cómo funcionan los números, entonces cabe preguntarse por lo que sacarán como resultado del uso de los manipulativos.

Además, en el caso en el que el aprendiz haga conexiones entre el manipulativo y alguna idea nueva, las acciones físicas pueden hacer surgir acciones mentales distintas a las que el profesor deseaba promover. Así que la naturaleza física de los manipulativos no implica que conlleven el significado del objeto matemático pensado para ellos, dado que a veces se usan en forma arbitraria por el sujeto. Es posible que los estudiantes requieran de materiales concretos para construir inicialmente un significado, pero esto debe complementarse con una reflexión sobre sus acciones con el manipulativo, labor en la que el profesor debe mediar para ayudar a desarrollar representaciones cada vez más

sofisticadas de los objetos matemáticos, asunto que constituye uno de los supuestos de esta tesis. Clements lo expresa diciendo que aunque la experiencia kinestésica puede impulsar la percepción y el pensamiento, el entendimiento no viaja desde los dedos y sube por los brazos. Más aún, cuando se habla de entendimiento concreto no se refiere a que se aplique únicamente a los objetos físicos, ya que los profesores quieren que sus alumnos vayan más allá de los manipulativos. Por ejemplo, queremos ver que los objetos matemáticos como la Derivada, como objeto mental, sea algo *concreto* para los estudiantes experimentados. Lo concreto entonces puede verse de distintas formas.

De acuerdo con Clements (1999) puede haber dos tipos de conocimiento: por un lado el conocimiento *concreto*, que puede ser *concreto-sensorial* y *concreto-integrado*, y por otro el conocimiento *abstracto*. En el conocimiento *concreto-sensorial* se necesita el uso de materiales sensibles para dar sentido a una idea. Un ejemplo es el de los niños pequeños que no pueden contar si no disponen de objetos materiales a la vista que manipular, ni aún imaginando la presencia de estos objetos.

El conocimiento *concreto-integrado* se construye a lo largo del aprendizaje, y es conocimiento conectado en una forma especial, tal como la etimología de *concreto* lo expresa (crecer junto con; coagulado; condensado; formado por agregación de otras partes). Así, lo *concreto* es la combinación de partículas separadas pero interconectadas en una masa, en una estructura de conocimiento. Esta idea también se corresponde con el *conocimiento científico* de Vygotsky, aquel que forma parte de un sistema y equivale a una generalización que incluye a otros objetos subordinados y jerarquizados.

Pero una idea no es simplemente concreta o no-concreta. Dependiendo del tipo de relación que tiene con el conocimiento, puede ser *concreta-sensorial*, *abstracta* o *concreto-integrada*. Las ideas matemáticas en particular no podrían ponerse en el nivel *concreto-sensorial* porque los objetos matemáticos no están en la naturaleza física, y sólo disponemos de sus representaciones semióticas (gráficas, fórmulas, números, palabras, conceptos, símbolos, gestos). La idea del número 4 (cuatro) no está en un conjunto particular de cuatro objetos ni en el dibujo de cuatro objetos, sino en una representación del número cuatro conectada con la idea de cuatro objetos o el dibujo de cuatro objetos.

Lo que hace que las ideas matemáticas sean *concreto-integradas* no son sus características físicas, pues el conocimiento físico es de naturaleza diferente al conocimiento lógico-matemático; además, la investigación ha mostrado que las fotografías o dibujos son igualmente efectivas para el aprendizaje que los objetos físicos. Lo que hace que las ideas sean *concreto-integradas* es el cómo se conectan en forma significativa con otras ideas y situaciones, tal como sucede en la progresión de tareas con los manipulativos virtuales en la presente investigación. Por ejemplo, se sabe que niños que ya entienden los números pueden resolver tareas con o sin objetos para contar, pero los que no entienden los números, pueden ver los objetos como algo abstracto, misterioso, arbitrario, desconectado de la realidad. Los buenos manipulativos son aquellos que ayudan al estudiante a construir y hacer evolucionar y conectar varias representaciones de las ideas matemáticas. Se asume a menudo que los estudiantes que muestran facilidad para las matemáticas, lo hacen porque poseen un gran conocimiento de procedimientos y estrategias, pero la realidad es que más a menudo los estudiantes poseen conocimientos relevantes pero no generan representaciones

mentales de la información necesaria, cuestión en la que los manipulativos pueden resultar útiles.

Comparando las dos acepciones de lo concreto en los tipos de conocimiento, vemos dos descripciones de lo que significa *concreto*. El conocimiento *concreto-sensorial* requiere del apoyo de objetos manipulables, y el *concreto-integrado* se refiere a conceptos que son *concretos* en un nivel superior puesto que están conectados con una red de otros conceptos, tanto conocimiento físico que ha sido abstraído o distanciado de los objetos materiales, como conocimiento abstracto de varios tipos. No se puede por tanto diferenciar neta y tajantemente el conocimiento concreto como opuesto al conocimiento abstracto, sino que guardan una relación dialéctica tal como se ha dicho arriba en las consideraciones epistemológicas.

Como dice Clements (1999), aunque aceptemos que lo concreto no está sólo en los manipulativos físicos, se puede experimentar una incomodidad en ver los manipulativos computarizados o virtuales como válidos. Sin embargo, la computadora provee representaciones que pueden ser igualmente significativas para los estudiantes que los objetos físicos. Resultados de investigación incluso indican que las representaciones computarizadas son más cómodas, flexibles y versátiles que las físicas, y que estudiantes que usan ambas presentan resultados cognitivos mejores que los que usan sólo las físicas.

Lo concreto entonces, como en la belleza, está en la mente del sujeto, y una buena actividad concreta, en el sentido aquí discutido, es una buena actividad mental. Los buenos manipulativos, según Clements, son aquellos que son significativos para el estudiante, proveen control y flexibilidad, y son consistentes tanto con la estructura matemática del

objeto como con la estructura cognitiva del sujeto. Estos manipulativos ayudan al aprendiz a conectar trozos y tipos de conocimiento, por lo que impulsan el *conocimiento científico* de Vygotsky que, recordemos, no es sólo aquel proveniente de experimentos científicos, sino que es el que está sistémicamente relacionado y jerarquizado respecto a otros conocimientos.

### **II.8.3 Factores de interactividad de las representaciones matemáticas visuales que afectan el aprendizaje y el proceso cognitivo**

Las herramientas cognitivas computarizados aplicadas en matemáticas, pertenecen a una categoría de ayudas externas diseñadas para ayudar o impulsar el aprendizaje y los procesos cognitivos de los estudiantes. A menudo contienen representaciones visuales interactivas que involucran las relaciones y propiedades de los objetos matemáticos. La interacción permite efectuar y explorar operaciones epistémicas que se aplican para aprender estos objetos. La interactividad puede influenciar el *cómo* y de *qué manera* aprenden los estudiantes. Varios factores afectan el proceso cognitivo durante la interacción. Investigadores de varias disciplinas han caracterizado la interactividad y aislado algunos factores que la afectan. Pero muchos de estos factores son inaplicables a los ambientes computarizados. Sedig y Hai-Ning (2006), buscando en varias disciplinas, reunieron doce factores de interactividad que afectan el aprendizaje y los procesos cognitivos de los usuarios de la computadora. Estos doce factores, contemplados en forma integrada, constituyen un marco conceptual y descriptivo, incluso prescriptivo, y no un *marco teórico* propiamente dicho, que no había sido identificado claramente en el pasado, y que puede servir para fundamentar las decisiones de diseño y evaluación de los artefactos y herramientas cognitivas computarizados que incluyen en sí mismas la interactividad.

#### II.8.4 Interacción e interactividad

Interacción e interactividad son componentes esenciales de una herramienta cognitiva. Las representaciones visuales disponibles no son en general interactivas, por lo que mucho de sus propiedades semánticas y relacionales permanecen invisibles y latentes. Para razonar y aprender, el estudiante debe analizar, evaluar, procesar y elaborar sobre los objetos, como señala Ilyenkov, Leontiev y Galperin citados en esta tesis, entre muchos otros. La interactividad permite realizar acciones epistémicas adaptando la información visual que se necesita, y extendiendo el alcance epistémico de las representaciones estáticas, como las de los textos. La interactividad también extiende el poder comunicativo añadiendo una dimensión temporal, volviéndola dinámica y haciendo visibles los significados latentes en el contenido. Personaliza el *qué* y el *cómo* de la presentación de información visual. Permite realizar numerosas actividades cognitivas como visualizar, analizar, interpretar, modelar y organizar. Otros beneficios serían el apoyar el razonamiento dialógico con y a través de las representaciones visuales, permitiendo experimentación y exploración de hipótesis *si...entonces*; haciendo más fácil la acción con los conceptos, facilitando la creación de *insights* cualitativos, y coordinando los modelos mentales internos con las representaciones ostensivas externas.

Interacción e interactividad están íntimamente relacionadas, pero son conceptos distintos. Tienen diferentes connotaciones y significados según el contexto. Según Sedig y Hai-Ning (2006), la *interacción* se refiere a un aprendiz comunicándose con una representación matemática visual a través de un interfaz humano-computadora, que tiene lugar en un tiempo-espacio continuo y tiene dos implicaciones: a) el usuario actuando sobre el objeto matemático visual y b) el objeto visual respondiendo o reaccionando de alguna



forma sobre el usuario y su interpretación. La *interactividad* se refiere a los sentimientos, formas, propiedades, cualidades y dimensiones de la *interacción*.

Ambas, *interactividad* e *interacción* sugieren implícitamente cómo y qué aprende el usuario. Un objeto visual puede ser interactivo, pero dependiendo de su interactividad, la interacción puede requerir diferente monto de esfuerzo cognitivo, comprometer y apoyar diferentes procesos de pensamiento, facilitando diferentes grados de razonamiento y aprendizaje y permitiendo diferentes tipos de intercambio entre el aprendiz y el contenido. Por ejemplo, los usuarios pueden interactuar con un objeto matemático visual, sin embargo, si hay otra representación intermediaria directa o indirecta, puede afectar sus procesos de atención y de aprendizaje. De manera parecida, si la interacción es ayudada o no, puede influenciar el proceso de toma de decisiones. El conocimiento de los factores que afectan el aprendizaje y los procesos cognitivos, puede ayudar en el análisis y evaluación de manipulativos virtuales. Los beneficios de la interactividad pueden perderse o disminuirse si no se toman en cuenta estos factores de interactividad en sus diseños.

Investigadores de numerosas disciplinas han intentado caracterizar la interactividad y la multiplicidad de factores que la afectan. Por ejemplo, en las interacciones humano-computadora, se discute la interactividad en términos de las capacidades de eficiencia, *amigabilidad*, ayuda, aprendizaje y usabilidad de las herramientas de interactividad. Los comunicólogos la ven desde la capacidad de intercambio de información y comunicación. Pero muchas de estas caracterizaciones no son fácilmente aplicables a los manipulativos virtuales. Una de las razones principales es que no se ocupan de herramientas cognitivas para aprender, sino que más bien lo hacen con las herramientas de productividad y las de sitios Web comerciales cuyos fines son distintos a los educativos. Otra razón es que la

investigación mencionada no se ocupa de representaciones visuales y razonamiento. Sedig y Hai-Ning (2006) ha hecho un intento de crear un marco descriptivo (que puede extenderse a lo prescriptivo) formal para analizar la interactividad de las representaciones matemáticas visuales que ayuden a los diseñadores de herramientas cognitivas a fundamentar sus decisiones. El marco presenta doce *factores de interactividad*, a saber:

1. *Provisión de información*: provisión de claves de interfaz para advertir posibles interacciones, o para saber qué puede hacerse con la animación. Este factor afecta los procesos de percepción y atención de usuario, haciéndolo consciente de las interacciones de que dispone la animación. En los manipulativos, está representada por la barra de desplazamiento rotulada que es la única forma de activarlos.

2. *Descarga cognitiva*: provisión de interacciones que descargan esfuerzo cognitivo del usuario en algunas operaciones. Debe guardar un equilibrio con la capacidad epistémica de la animación, de tal forma de que no se pierda su utilidad descargando la totalidad del esfuerzo cognitivo. En los manipulativos, las operaciones matemáticas que acompañan al lenguaje gráfico y de símbolos matemáticos, se hacen en forma automática mientras se acciona la barra de desplazamiento, descargando al sujeto de su ejecución para que pueda fijar su atención en las relaciones importantes al objeto tratado.

3. *Restricción dirigida*: enfoque de la posible interacción de tal forma que se canalice o dirija la atención del usuario hacia el objetivo de la interacción y no se distraiga en otra cosa. Puede haber restricciones lógicas, geométricas, algebraicas u otras, y sus combinaciones. Por ejemplo, restringir la posibilidad de cambiar una de las dimensiones de una figura geométrica a unos pocos valores que enfoquen el objetivo de la animación. En los manipulativos aparecen sólo un mínimo de elementos necesarios a la abstracción de las

características de los objetos matemáticos, además de que hay sólo una forma de activar el manipulativo a través de la barra de desplazamiento.

4. *Distancia*: grado de dificultad para entender cómo actuar sobre la animación y para evaluar o interpretar sus respuestas. La distancia que debe cruzar el usuario para la ejecución y evaluación de la animación, afecta el monto de esfuerzo cognitivo y en consecuencia la profundidad de su aprendizaje. Puede haber varios tipos de distancia: *semántica* (el significado que da el usuario en relación con el significado con que fue diseñada la animación), *articuladora* (dificultad en la forma de las expresiones de entrada respecto a las de salida), *conceptual* (diferencia entre los modelos conceptuales sobre cómo actuar sobre la animación y los de la propia animación) y de *presentación* (dificultad en cambiar a otros tipos de presentación de la animación para que se adapten al usuario). A este respecto, los manipulativos contienen elementos simples ya conocidos por los sujetos (como gráficas en el plano cartesiano, como la fórmula de la pendiente de un segmento recto u operaciones simples aritméticas y algebraicas), a partir de los cuales se construye un objeto más complejo.

5. *Idoneidad epistémica*: facilidad y armonía de las interacciones con la animación en una tarea para apoyar la percepción, el razonamiento y el aprendizaje del usuario. Puede haber manipulativos o tipos de interacciones que no sólo obstaculicen el aprendizaje, sino que pueden amplificar los pre-conceptos erróneos. Esto depende del diseño de los manipulativos hecho por el profesor-investigador, en particular su elección de los elementos necesarios al proceso de abstracción del significado del objeto meta. Tal elección está reflejada en las funciones semióticas sobre el objeto matemático que se quieren promover en el sujeto.

6. *Realimentación*: intercambio de información y de dirección de comunicación durante la interacción entre los usuarios y la representación visual. Es el ciclo de comunicación que permite el *diálogo* entre animación y usuario, provee información para corregir nociones erróneas, desafía y hace revisar estructuras cognitivas ya formadas, y puede mejorar la actitud del usuario hacia el aprendizaje. Los manipulativos proporcionan retroalimentación inmediata cada vez que se cliquee en la barra de desplazamiento, ocasión en la se muestra un ejemplo o caso relativo al objeto meta.

7. *Flexibilidad*: rango y disponibilidad de elecciones y opciones para el usuario, quien tiene cierto control y libertad para decidir sobre las opciones que le convengan en cuanto a velocidad de la animación o a formas de presentación. Siendo el sujeto el que cliquee en la barra de desplazamiento en el manipulativo, es él quien controla el ritmo de presentación de los objetos en el mismo.

8. *Flujo*: duración de la interacción del usuario con la animación en el tiempo, y sus efectos sobre la percepción de la relación causa-efecto por parte del usuario. Capacidad de estimular el razonamiento causal. Puede haber acciones y reacciones *continuas* o *discretas*, y combinaciones de acción discreta y reacción continua y otras combinaciones; también puede haber la posibilidad de visualizar estados intermedios de una operación o la posibilidad de “congelar” una acción para poder comprenderlas mejor. El flujo de interacción del sujeto con el manipulativo no es continuo sino discreto, pues el manipulativo es activado con clipear cada vez sobre la barra de desplazamiento, dando oportunidad de observar el estado actual de la pantalla y activarla de nuevo cuando sea preciso.

9. *Foco*: lugar o sitio donde se concentra la atención del usuario durante la interacción con la animación. Puede ser *directo* o *indirecto*, según exista la posibilidad o la

obligación de accionar otras representaciones relacionadas con la representación de interés central. En el pasado, la comunicación con las computadoras se hacía a través de comandos escritos, y esto dificultaba mucho la interacción como la que pretende una animación. La elección del foco directo o indirecto puede ser intencional, según el objetivo perseguido. La investigación en este ámbito ha encontrado que el uso de ambos focos incrementa la profundidad del aprendizaje, pero en los manipulativos el foco es sólo directo hacia los objetos y sus relaciones específicos.

10. *Grado de implicación*: grado de compromiso y de contribución con la información del contenido de la animación permitidos por la interacción disponible. Hay un continuo en el grado de implicación entre el caso de interacción puramente observacional y el construccionismo (construcción de representaciones socialmente compartidas del conocimiento). En el primer polo, el usuario debe observar, manipular y analizar una situación presente en la animación. En el polo construccionista, el usuario se involucra en acciones de creación, generación, diseño y construcción, como la composición o la descomposición de un objeto a partir de trozos. Un ejemplo de artefacto construccionista es *Cabri-Géomètre*, con el que se puede componer figuras geométricas, y que permite ejercitar el razonamiento deductivo y las demostraciones geométricas. La interacción ideal se situaría en un punto intermedio entre estos dos polos, en el que creemos están los manipulativos virtuales a pesar de su sencillez en relación a las animaciones de *Cabri-Géomètre*.

11. *Andamiaje*: provisión de interacciones para apoyar la cognición y aumentar el entendimiento y el razonamiento de los conceptos implicados en la animación. Este andamiaje debe irse desvaneciendo progresivamente para permitir procesos reflexivos y autonomía en el usuario. Los manipulativos no varían el grado de andamiaje ofrecido.

12. *Transición*: comunicación de los cambios visuales de la animación, de los que puede trazarse una historia o conservar las etapas sucesivas a la vista para tener una consciencia de la transición. Los manipulativos no guardan la memoria de la transición.

Estos factores no son ortogonales, es decir, que en realidad están interrelacionados y pueden interactuar entre ellos. Este etiquetamiento o caracterización aparentemente aislada, sin embargo, ayuda en el análisis, diseño y evaluación de los recursos visuales de las herramientas cognitivas.

La investigación futura en este campo, como lo piensan Sedig y Hai-Ning (2006), pasaría por los puntos siguientes: a) organización de las herramientas matemáticas visuales según sus características, b) análisis de las tareas cognitivas involucradas en la solución de problemas matemáticos y en su aprendizaje (en la presente investigación esto equivale al establecimiento previo de las funciones semióticas detalladas sobre cada uno de los objetos matemáticos meta), c) reglas generales para saber dónde y cómo usar cuáles interacciones, d) reglas para operacionalizar efectivamente los factores de interactividad, y e) organizar y categorizar las mejores herramientas y diseños para la consulta. Hace mucha falta una evaluación empírica de las herramientas y de las técnicas para desarrollar, validar y refinar estos factores de interactividad de Sedig y Hai-Ning.

Esta tesis colaborará en algo para este desarrollo, pues el diseño de las herramientas visuales interactivas o manipulativos que se usan en ella, está en estrecha relación con las *funciones semióticas* a las que sirve y desarrolla, es decir, que los manipulativos son diseñados para efectuar tareas cognitivas específicas y predeterminadas, lo que implica un previo análisis epistémico y cognitivo de las tareas, como quieren Sedig y Hai-Ning (2006).

## **II.9 Síntesis teórica: argumentación sobre la relación entre los productos de la acción humana: ¿procesos psicológicos superiores, sistemas de signos, sistemas de prácticas, acciones mentales o funciones semióticas?**

La acción humana mediada por instrumentos y dirigida a metas implica la acción ligada a objetos y a signos. El resultado o producto de esta acción en el sujeto que actúa puede ser visto según el matiz que imprimen las distintas posturas teóricas desde la que se contemple el asunto. Por ejemplo, desde el enfoque *histórico-cultural* original de Vygotsky, el resultado sería una *función psicológica superior* o un *comportamiento de orden superior* caracterizado por la incorporación y combinación de herramientas y signos en la actividad psicológica. Desde la postura de Leontiev en la *teoría de la actividad*, rama de la teoría *histórico-cultural*, el foco está en el carácter objetual de la acción, y no en el aspecto semiótico que interesa a Vygotsky. Así, se puede decir que el resultado de la acción es un significado lingüístico donde están incorporados unos procedimientos de acción elaborados socialmente, es decir, las operaciones con las que las personas conocen y modifican la realidad objetiva, una forma ideal de existencia del mundo objetual, de sus propiedades, vínculos y relaciones, puestos al descubierto por la práctica social conjunta (Leontiev, 1978). No puede haber entonces actividad sin existentes u objetos, aunque esos objetos pertenezcan a alguna realidad virtual (Otte, 2001).

Desde el punto de vista pragmático, como el de la postura de Charles S. Peirce, el resultado de la acción sería un *hábito* o un actuar de cierta manera ante una circunstancia determinada por un motivo dado, que si es auto-controlado se llama *creencia*. Piotr

Galperin diría que el resultado sería una *acción mental* o forma mental abreviada proveniente de acción material y verbal, las tres ligadas al mismo objeto, el objeto de la acción mediada. Visto desde un enfoque antropológico, el resultado sería una práctica cultural mediatizada relativa al objeto de la acción. Finalmente, al menos para las teorías aquí involucradas, desde el *enfoque onto-semiótico* el resultado sería el establecimiento de una o varias *funciones semióticas*, o sea, del significado pragmático caracterizado por esas funciones y que consiste en un sistema de prácticas personales relativas al objeto de la acción.

Pero una *función psicológica superior* no es exactamente una *creencia*, ni una *función semiótica* es exactamente una *acción mental* o un *sistema de prácticas*. Será necesario primero matizar sus semejanzas y diferencias, para luego establecer sus relaciones y argumentar sobre el resultado de la acción cuyo análisis interesa en esta investigación.

A continuación se glosarán y relacionarán los resultados de la acción arriba mencionados, poniendo frente a frente todas las ideas expresadas arriba.

Como lo ilustra claramente Vygotsky (1978), la diferencia esencial entre las *funciones psicológicas superiores* y las *elementales* tiene que ver con la relación estímulo-respuesta de cada uno. Las funciones elementales están determinadas totalmente por el estímulo del ambiente, mientras que en las superiores el estímulo es auto-generado, o sea, que la creación y empleo de estímulos artificiales por el sujeto es la causa inmediata de su comportamiento. Según Xomskaya (2002), la *función psicológica superior* (la que surge durante la vida, es mediatizada y regulada voluntariamente) no es una capacidad psíquica,



sino una forma compleja de actividad psicológica que incluye los motivos, los objetivos, las acciones y operaciones de la actividad, y los mecanismos de control. Es un sistema psicológico complejo, no una unidad, que consta de muchos componentes y que se caracteriza por aspectos determinados. Como se había señalado antes, las características distintivas de una *función psicológica superior* son: el control voluntario ejercido por el sujeto versus el control del entorno; su realización consciente o intelectualizada; el origen y la naturaleza social de estas funciones; y por sobre todas estas, la mediación de herramientas psicológicas o signos sin los cuales las anteriores no podrían concretarse.

La *acciones mentales* de Galperin, por su parte, tienen que ver con la habilidad exclusivamente humana de actuar con sustitutos simbólicos de los objetos sin la presencia de estos, habilidad sobre la que Galperin construye su idea de *internalización*. Las *acciones mentales* no son facultades mentales o cerebrales, sino que están ligadas a los objetos, y se llevan a cabo sin ejecución física siguiendo reglas del mundo externo, como también sostiene Leontiev. Son formas abreviadas provenientes de la acción material y verbal. Las *acciones mentales* son intentos conscientes de transformar los objetos de acuerdo a un resultado pretendido. Estas características coinciden con las señaladas en el párrafo anterior para las *funciones psicológicas superiores*.

Aunque en estas ideas no hay alusión alguna a los signos o al aspecto semiótico de la acción, del que Leontiev y Galperin se alejaron a propósito en parte por razones ideológicas, creemos que la vertiente semiótica es insoslayable pues, como sostienen los semióticos, los pragmáticos, los antropólogos y sociólogos, todo nuestro acceso cognitivo a los objetos del mundo está mediado por signos, es relativo, no directo ni absoluto. En el apartado siguiente, titulado **Consideraciones epistemológicas**, se presenta una discusión

que fija una postura para esta tesis, ligada al *materialismo dialéctico* que es la base filosófica de la teoría histórico-cultural. Según Otte (2001), la actividad con objetos es la base de todo conocimiento y toda cognición, y entonces los signos, portadores de significado, y los objetos, una pura existencia actual de los que los signos dependen, deben ser incorporados mancomunadamente a lo que llamamos realidad. No hay entonces una distinción de tipo absoluto entre objeto y signo, pues ni el objeto está completamente desprovisto de significado, ni el signo es algo que esté ya completamente entendido, por lo que podríamos decir que lo que llamamos el *entendimiento completo* de un objeto es imposible como una existencia factual. Estas ideas muestran la relación funcional objeto-signo. Desde la semiótica de Peirce, se diría que la relación triádica *signo-objeto-interpretante* (este último es otro signo en la mente del sujeto) es indisoluble o que sus elementos no pueden tener existencia aislada. Y aún desde las ideas de Kenneth Burke (1969), la acción humana, a diferencia del mero movimiento, se caracteriza por ser un comportamiento que involucra símbolos.

La acción humana, estudiada por Leontiev y Galperin entre otros, es donde tiene lugar la objetivación de las representaciones que motivan y regulan cualquier acto del sujeto. La actividad inicial es externa, objetual, y de ella se deriva la actividad interna psíquica individual (Davydov, 1988), si bien se discute en otro apartado la relación dialéctica interno-externo que no contempla la existencia de un orden cronológico entre ambas actividades. El objeto de la actividad se presenta entonces dialécticamente en dos formas: en su existencia real, que captura la atención del sujeto, y como imagen psíquica del objeto producto de la actividad del sujeto con el objeto. Zinchenko (1939/1983) lo expresa así: *The action is the actual process by which the transition or 'translation' of*

*object activity into its ideal reflection in the mind, into the consciousness of the acting subject, occurs* (Zinchenko, 1939/1983, p. 74). Ambas formas del objeto dirigen la actividad. La imagen, que es de hecho una prueba de la existencia del objeto, conlleva el sistema de relaciones y propiedades objetivas que lo caracterizan. Si aquí tomamos *imagen psíquica del objeto* como sinónimo de *signo*, en particular el signo *interpretante* en la semiótica de Peirce, es decir, un signo en la mente generado por un signo externo que representa a un objeto, podemos entonces articular los aspectos semióticos a los de actividad objetual, que como señalan Zinchenko (1997), Davydov (1988 y 1972/1990) y Gillespie/Zittoun (2009), se complementan mutuamente. Esta articulación *actividad-objeto-signo* es expresada por Martínez (1999) como sigue:

*En la acción dirigida a metas y mediada por instrumentos se reflejan las funciones psicológicas y las relaciones existentes entre ellas. Se expresan los signos, los significados y encontramos otras manifestaciones semióticas. Además, la acción dirigida a metas implica al individuo en comunicación con otros agentes de su medio. Es decir, en ella se reflejan formas de comportamiento que se organizan y que son definidas de una manera cultural, en función de los patrones aceptados en el grupo social al que se pertenece, los cuales se adquieren a través de la interacción que mantienen sus miembros (Martínez, 1999, 28).*

En esta cita se alude, además de a los aspectos *histórico-cultural*, de la *actividad* y al *semiótico*, también al *antropológico*, en la que se toma en cuenta que el empleo que hacemos de los signos y los artefactos está subsumido en prototipos culturales, lo que provoca que la manera en que estos signos y artefactos se usan altera la forma en que los objetos conceptuales se captan con los sentidos. Desde dicho enfoque antropológico, los

objetos matemáticos son tomados como patrones fijados de actividad humana sujetos a los cambios de la práctica social reflexiva y mediatizada (Radford, 2003). Los objetos matemáticos son así símbolos de unidades culturales emergentes del sistema de usos o sistemas de prácticas ligados a la solución de problemas que hacen ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo. El significado de los objetos está pues completamente ligado a la actividad humana.

Esta última postura es afín con la del *enfoque onto-semiótico*, en el que el significado de un objeto es justamente el sistema de prácticas discursivas y operativas que se hacen alrededor de ese objeto, tanto personales como institucionales.

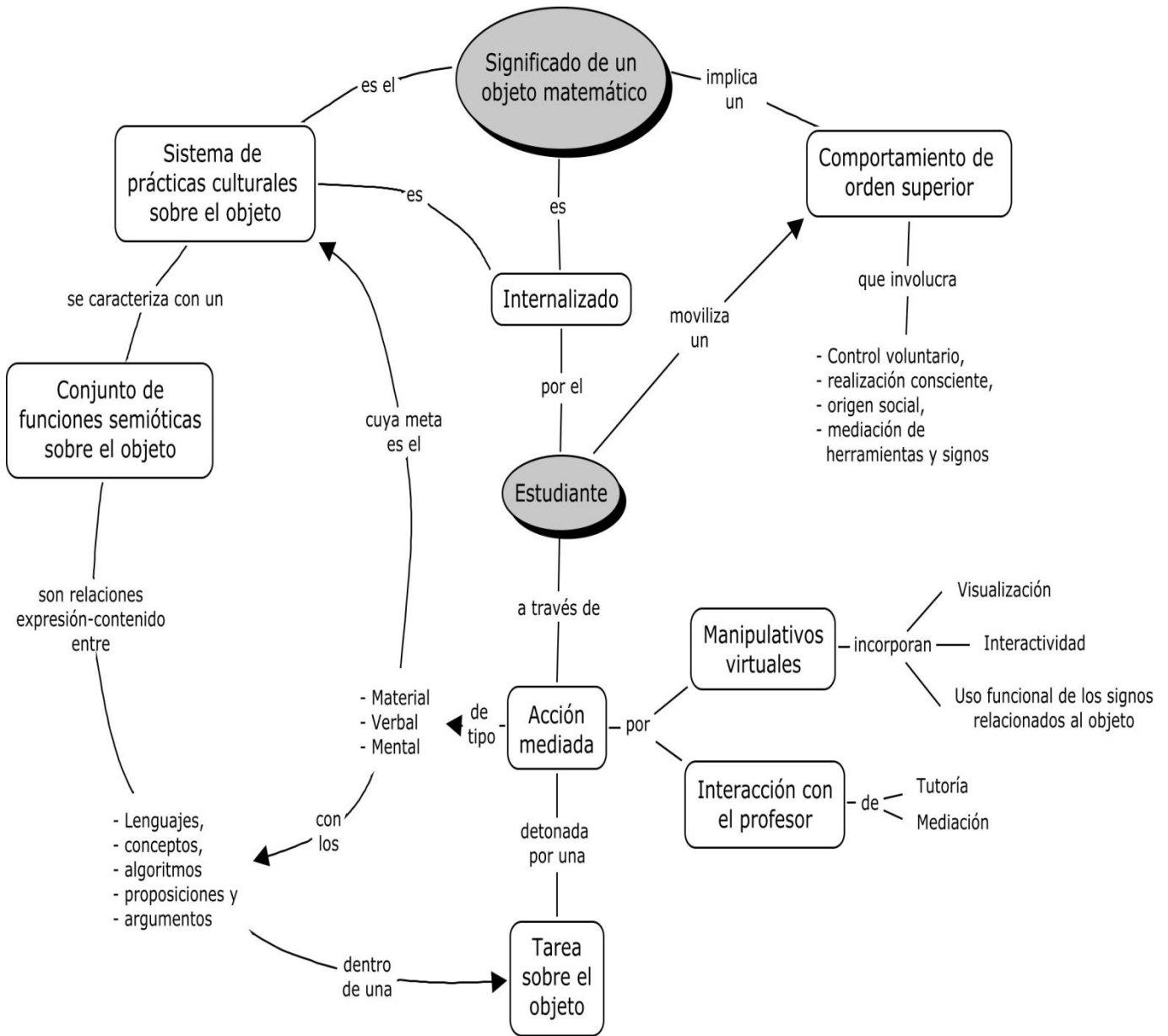
Establecido el nexo entre las actividades objetual, semiótica y antropológica, y por tanto entre las *funciones psicológicas superiores*, las *acciones mentales* y las prácticas culturales, podemos establecer la relación entre las *funciones psicológicas superiores* y las *funciones semióticas* con las que se expresa el significado pragmático de un objeto. Se argumentará a continuación.

Como se ha dicho arriba, cada *función psicológica superior* implica un control voluntario ejercido por el sujeto, así como una realización consciente o intelectualizada; además tiene un origen social y es mediada por signos. Si estas características de las funciones psicológicas son trasladadas al significado pragmático de algún objeto matemático, puede decirse que las *funciones semióticas* que caracterizan ese significado pragmático son de hecho *procesos psicológicos superiores*, cuya formación en un sujeto es el objeto de estudio de esta investigación. Recordemos que las *funciones semióticas* de los objetos matemáticos son relaciones *expresión-contenido* establecidas entre los componentes

del significado, a saber, los lenguajes de expresión (verbal, numérico, gráfico, simbólico o algebraico, gestual), los conceptos y definiciones involucrados, las proposiciones que pueden hacerse con ellos, los algoritmos relacionados con el objeto matemático, los argumentos de validación y los problemas intra o extra-matemáticos de donde surgen todos los componentes anteriores.

Estas *funciones semióticas* para los objetos matemáticos son pues relaciones entre signos simples y compuestos, operados voluntaria y conscientemente por el sujeto, provenientes del movimiento entre el significado personal del sujeto y el significado construido histórica, cultural y socialmente por la humanidad. Una vez generadas, las *funciones semióticas* controlan el comportamiento del sujeto en lo que toca al uso y aplicación del objeto matemático en cuestión. Justamente de estas consideraciones sobre las *funciones semióticas* que caracterizan al significado se puede inferir su carácter de *proceso psicológico superior*, y por ese hecho, de ser susceptible de formación a través de transiciones genéticas (o sea, donde una acción genera a otra) detonadas por las tareas mediadas por los manipulativos virtuales en la computadora y por los intercambios discursivos estudiante-profesor asociados a ella.

Las relaciones entre los conceptos discutidos en esta argumentación se presentan a continuación ahora en la forma de un mapa conceptual en la Figura 7, que articula todas las ideas presentes en el marco teórico.



**Figura 7.** Relación y articulación entre los elementos de la argumentación. Modelo y síntesis teórica de la tesis.

## II.10 Consideraciones epistemológicas

La acción de los estudiantes con los manipulativos virtuales que es investigada en esta tesis, es una actividad matemática que tiene el propósito definido de lograr la *abstracción* de las características esenciales de los objetos ahí involucrados y su posterior *internalización*. El fenómeno de la *abstracción* se ha abordado en la cultura occidental según Ozmantar y Monaghan (2007), desde dos posturas: *empirista* y *dialéctica*. La visión *empirista* se deriva de la tradición de Locke, que afirma que las ideas devienen generales separándolas de las circunstancias de tiempo y de lugar, es decir descontextualizándolas. Estas ideas generales se obtienen identificando características comunes de entre casos particulares, y se mueven *subiendo* desde lo concreto a lo abstracto. El problema de la primacía epistemológica de los ejemplos particulares sobre las abstracciones es el señalado por Ilyenkov en otro apartado, y que surge al preguntarse cómo es que se puede reconocer si un caso particular pertenece a un tipo de abstracción si el sujeto no conoce aunque sea en forma rudimentaria algo de esa abstracción. Por el lado de la descontextualización puede criticarse el hecho de que si el significado reside solamente en los objetos, entonces las abstracciones matemáticas deberían ser traducidas de un mundo a otro, lo cuál es muy difícil, tanto como si la abstracción se deriva únicamente del discurso matemático sin el recurso de referentes concretos. La investigación ha mostrado que el contexto (que incluye herramientas o artefactos, el tipo de tareas y la historia individual y social de los sujetos que están en él) marca diferencias en la formación de las abstracciones en los estudiantes. La postura de esta tesis es que las abstracciones surgen y son aplicadas dentro de un contexto particular que las conforma, en este caso, el *escenario de actividad* propuesto que es a la

vez la unidad de análisis de la investigación. Estas abstracciones pueden luego ser des-contextualizadas y re-contextualizadas para poder aplicarse a otros casos.

Por lo que toca al acercamiento *dialéctico* a la abstracción, hay que comenzar señalando la primacía o jerarquía que el pensamiento occidental ha dado a lo abstracto (lo intelectual) como surgiendo *desde* lo concreto (lo trivial en sentido peyorativo, lo que no tiene importancia o interés, lo que es simple pero que hay que mencionar en una afán de completitud). Pero lo abstracto no es sólo el producto de una sucesión temporal sino que mas bien es algo que no puede desligarse del diálogo con lo concreto, ya que no puede haber un divorcio o una abierta dicotomía entre el mundo perceptual/material y el mundo mental/conceptual, tal como afirman las teorías psicológicas derivadas del *materialismo dialéctico* (Ozmantar y Monaghan, 2007) que forman la base filosófica de esta tesis. La abstracción por sí sola no puede producir entendimientos significativos en el mundo concreto a menos que exista cierta relación interna entre lo concreto y lo abstracto, o sea que estén dialécticamente conectados gracias a la actividad humana formando una *unidad de la diversidad*, como lo expresa el planteamiento marxista. La abstracción es entonces el proceso de construcción de sentido que se da en situaciones concretas al tratar de descubrir nuevos significados estableciendo interconexiones entre los diferentes elementos de un todo (van Oers en Ozmantar y Monaghan, 2007). Es justamente este descubrimiento de nuevas interconexiones entre elementos ya conocidos por los estudiantes y los elementos emergentes lo que se busca en la acción sobre los manipulativos virtuales en esta tesis, ya que estos presentan múltiples objetos (gráficas, conceptos, números, fórmulas y operaciones matemáticas conocidas) cuya manipulación, que es una expresión del uso



funcional de los signos involucrados, permite ir descubriendo relaciones sistémicas entre ellos.

Aunque hay autores que sostiene la idea de que la búsqueda de una esencia común en una serie de objetos concretos es ejecutada por el cerebro humano en forma automática como una capacidad innata, otros como Davydov (1972/1990), y nosotros con él, piensan que la lógica formal no tiene reglas sobre este asunto, y apoyan una aproximación dialéctica abstracto-concreto o relación de doble sentido que es discutida también en otros apartados de esta tesis. Para Davydov lo *concreto* se refiere a un todo desarrollado, a una interconexión o unidad de diferentes partes, tal como la etimología de la palabra lo establece y como también lo usa Clements (1999); lo concreto es un sinónimo del rol determinante del todo respecto a sus partes, características o aspectos. Lo *abstracto* en cambio es algo simple, desprovisto de diferencias, fragmentario y no desarrollado.

Davydov dice que abstraer las características esenciales o el conocer la *esencia* de algo, significa encontrar lo universal como una base o fuente de una variedad de fenómenos, y con esto mostrar cómo este universal determina la emergencia e interconexión de los fenómenos concretos. Este proceso requiere de *análisis* y de *síntesis*. El *análisis* establece primero abstracciones iniciales aún no desarrolladas por las que las características externas observables se conectan a través de pensamiento empírico. Sin embargo determinar la esencia de algo requiere todavía de una *síntesis* empleando pensamiento teórico que reproduce las formas universales de las cosas que no están ya disponibles a los sentidos, así como su medida y sus leyes (Davydov, 1972/1990). El resultado final de este proceso de abstracción es algo que es consistente y altamente estructurado, es decir, concreto. La base de la abstracción es la actividad práctica humana

en la que los sujetos concluyen sobre las características y las potencialidades de los objetos, cosa que se realiza sobre la base de una interacción social con otros sujetos. Así, la abstracción es el proceso de contextualizar una experiencia desde un cierto punto de vista (relación, metáfora, imagen), y la selección de este punto de vista es lo que guía al sujeto al descubrimiento de la esencia. Los puntos de vista no están dados de antemano, sino que son contruidos en procesos comunicativos e interpretativos en interacción social que tiene un propósito y están mediados por herramientas. Es el profesor quién discursivamente enfoca al alumno en los aspectos particulares y cada vez más aislados de la situación, y quien ayuda a los alumnos en la construcción de nuevos objetos mentales (abstracciones) que ponen los medios para ver varias cosas como relacionadas entre sí, y por tanto, para acceder de lo abstracto a lo concreto.

La abstracción entonces es un proceso inicial que se dirige hacia la producción de una estructura final consistente lograda a través de la reorganización vertical ascendente de las estructuras disponibles y el establecimiento de nuevas conexiones entre ellas (Schwarz, Dreyfus y Hershkowitz (2004). Aún así la estructura lograda suele ser endeble y necesita de consolidación. En el terreno de las matemáticas, como es el que interesa en esta tesis, esta reorganización vertical es la integración de objetos matemáticos simples y su desarrollo en objetos y estructuras de conocimiento cada vez más complejas, como puede verse en la progresión de tareas con los manipulativos virtuales propuesta en esta tesis, que van ascendiendo desde tareas con objetos simples (*plano cartesiano, funciones y sus gráficas, rectas tangente y secante, pendiente, razón media de cambio*) hacia tareas con objetos más complejos (como la *razón instantánea de cambio*) en las que los objetos previos son los componentes. Todo esto es sensible al contexto, es decir, a los medios usados y al tipo de

interacción social, que en el caso de esta tesis consiste en la acción con los manipulativos y en interacción con el profesor. Esas acciones epistémicas tienen un objetivo, están mediadas por herramientas y tienen lugar en un contexto social e histórico que sólo tienen significado dentro de un *escenario de actividad*.

La postura filosófica detrás de estas cuestiones es el *materialismo dialéctico*, según la cual la naturaleza funciona como un objeto de cognición humana, misma que se logra sólo a través de la actividad productiva y transformadora. Es decir, que la naturaleza se convierte en una *naturaleza humanizada*. Los objetos y la realidad les son dados al hombre social no a través de contemplación pasiva, sino sólo en la forma de actividad práctica sensorio-objetual. Esa es la fuente del aspecto activo del trabajo tanto en el aspecto de *los sentidos como teóricos* como el de las formas superiores de cognición científica. Las concepciones logradas en la actividad sensorial y en la relación con otros sujetos sirve para planificar acciones futuras y eso presupone la elección de la mejor de ellas. Por eso las concepciones mismas se convierten en objetos de la actividad del hombre sin tener el recurso directo de las cosas mismas, tal como en la idea de *acción mental* en Piotr Galperin. Aparece entonces una actividad reflexiva que permite *cambiar* las cosas en sus imágenes idealizadas sin cambiar las cosas mismas, lo que en la experiencia aquí investigada es la ejecución de la tarea en un nivel idealizado (*acción mental* en Galperin) sin la presencia física de los objetos. Tal cambio en la representación de las cosas descansa en la experiencia concreta que se tiene con ellas y engendra un tipo de actividad subjetiva en las personas que en filosofía se llama *pensamiento*. Pensar significa inventar o construir en la mente una representación idealizada del objeto que se corresponde con el propósito de la actividad. Pensar consiste en convertir o transformar la imagen original de un objeto de

trabajo en un cierto objeto idealizado en conformidad con un esquema idealizado de la acción (Davydov, 1972/1990). Esta transformación de imágenes puede ser hecha en el nivel de las concepciones sensoriales (*acción material* en Galperin) o en la actividad discursiva relacionada (*acción verbal* en Galperin), y en ambas los medios para expresar las imágenes idealizadas en signos y símbolos, es decir, las representaciones verbales y materiales que describen los objetos y a los métodos para producirlos, tiene una importancia central. Por lo tanto un objeto involucrado en el trabajo es transformado no solo en su aspecto material sino también en el aspecto reflexivo del trabajo, en el nivel *mental-ideal*. Cuando se construye y se transforma la representación de una cosa, surge también el entendimiento racional del objeto.

Así, cuando un objeto se convierte en objeto de una actividad, por lo mismo se convierte en un objeto de entendimiento o un objeto idealizado, y a la vez se convierte en objeto de un movimiento lógico. La esencia de un objeto puede ser reproducida en un concepto, o bien, el contenido de lo que llamamos *entendimiento del objeto* puede tener dos formas de expresión o niveles de cognición: empírico y teórico, dialécticamente conectados entre sí. En este sentido, el signo es tal real como el objeto.

## **II.11 Fundamentos teóricos hacia el diseño metodológico**

### **II.11.1 La unidad de análisis en la *teoría histórico-cultural***

Las ciencias sociales y del comportamiento, han comportado siempre la dicotomía en el interés entre lo individual y lo social, como señala Kuutii (1991). Si estas ciencias

toman al sistema social como unidad de análisis, tienen dificultades para incluir el efecto de la iniciativa humana, y si toman como unidad las acciones individuales, tienen dificultades para incluir al contexto. Una unidad resulta muy grande y la otra muy pequeña; y si se toma en su lugar un contexto arbitrario, esto no ayuda mucho para teorizar (Kuutii, 1991). La *teoría de la actividad* de Alexei Nikolaievitch Leontiev, considerada una rama o una extensión, y en ocasiones una desviación de la *teoría histórico-cultural* de Vygotsky, ofrece un concepto intermedio y un contexto mínimo significativo que puede constituirse como la unidad de análisis buscada: la *actividad humana*, prefigurada o aludida de alguna manera anteriormente por Lev S. Vygotsky. Este concepto sería más estable y más manejable que el sistema social, e incluye al contexto aunque su interés principal sea el individuo.

En Susi y Ziemke (2001) se hace una comparación de tres marcos teóricos relacionados con la actividad humana, específicamente aquella mediada por artefactos: la *teoría de la actividad* (de Vygotsky, Leontiev, Engeström, Kaptelini, Kuutti, Bannon), la *teoría de la acción situada* (de Suchman y Lave) y la *teoría de la cognición distribuida* (de Hutchins). Es de interés particular para esta tesis el estudiar la unidad de análisis adoptada por cada uno de esos marcos, dada la proximidad de los objetos de estudio de las investigaciones emanadas de tales teorías con el objeto de aquella.

En la *teoría de la actividad*, el contexto significativo mínimo para entender las acciones individuales es justamente la *actividad*, pues en ella se preservan las características y la unidad esencial de la *acción humana*. El objeto de investigación es siempre algo esencialmente colectivo aunque el interés principal es la acción individual.

En la *teoría de la acción situada*, la unidad de análisis es la relación entre el individuo y su entorno, o bien entre el conocimiento, la acción y las circunstancias en las que ocurre tal relación. El contexto, que incluye a los artefactos y a otros agentes, tiene un muy importante rol en cualquier acción, siendo parte de las condiciones ambientales, aunque el énfasis esté en el individuo. La unidad de análisis es pues la actividad de las personas actuando en un escenario, y no el individuo o el entorno aislados.

Por su parte, en la *teoría de la cognición distribuida*, la unidad de análisis es un sistema socio-técnico distribuido que consiste en personas trabajando juntas y en los artefactos que usan. Lo más importante de este enfoque es cómo la información es representada, transformada y propagada en la ejecución de una tarea. Usar un sistema como unidad de análisis permite observar directamente las muchas representaciones que hay en él, pues extiende los límites de la unidad de análisis más allá del solo individuo para incluir a otros agentes y a los artefactos, haciendo observable parte del proceso sistémico.

Los tres marcos presentados tienen en común el hecho de ir más allá del individuo aislado como unidad de interés, y consideran adicionalmente factores ambientales como la presencia y la función de los artefactos. Corroboran lo dicho por Wertsch (1988) en el sentido de que hace falta una unidad de análisis que vaya más allá de la consideración de entidades psicológicas tales como aptitudes, conceptos, unidades de procesamiento de información o funciones psicológicas aisladas.

Sin embargo en las aproximaciones psicológicas de tipo cognitivo, es el *individuo* en proceso de desarrollo el que constituye la unidad de análisis preferida, como se refleja en importantes estudios *microgenéticos* recientes que tienen al individuo como unidad, como

en los estudios de Tunteler y Resing, Chetland y Fluk, van Dijk, y van Geert, Flynn, Pine y Lewis, todos de 2007.

La necesidad e importancia de la adopción de una unidad de análisis sistémica está en la base del concepto de *escenario de actividad*, que será desarrollado en los apartados siguientes.

### **II.11.2 Importancia de la *actividad* como unidad de análisis**

El gran estudioso de la obra de Vygotsky, James Wertsch (Wertsch, 1988), hace una interpretación de la cultura en la cual esta se considera como un conjunto de actividades organizadas social e históricamente, lo que implica que las diferencias en el pensamiento de un sujeto se deben más a las actividades en que participa dentro de una cultura, que a la cultura global misma. Desde esa visión, es la *actividad* la que explicaría los procesos mentales. Una idea clave relacionada a la *actividad* (Kuutii, 1991), es que las relaciones que esta involucra no son directas sino mediadas por distintos artefactos, como los instrumentos, los signos, los procedimientos, las máquinas, los métodos, las leyes, las formas de organizar el trabajo y las prácticas aceptadas.

Los planteamientos de Vygotsky, Leontiev y otros científicos soviéticos respecto a la *actividad*, tienen un fundamento histórico en el pensamiento de Karl Marx, en particular en ideas como la del origen social de la consciencia humana y la adopción de unidades de análisis holísticas. También están presentes ideas de Friedrich Engels en lo que toca al rol de la mediación de las herramientas, como apunta Wertsch (1988). Por otro lado, la consideración de que el desarrollo del pensamiento es influido por la actividad en un contexto social, se apoya también en ideas del filósofo Baruch Spinoza, adoptadas por

Vygotsky, en particular cuando aquél afirma que el pensamiento no es una sustancia, sino un atributo, una función o actividad de la mente. Spinoza dice que el pensamiento no es el resultado de la acción, sino la acción en sí misma (en Wertsch, 1988).

### II.11.3 Precisiones sobre el concepto de *escenario de actividad*

La relación entre cultura y cognición, que es el trasfondo de la postura *histórico-cultural* y también de esta tesis, ha sido investigada tradicionalmente desde la psicología cognitiva o desde la psicología de la educación con influencia de Jean Piaget (Cubero, 2000). Esto implica una visión empirista y racionalista de la cognición en la que esta es contemplada como un fenómeno homogéneo y universal desligado de lo social, lo cultural o lo histórico.

Como se ha dicho antes, el *enfoque histórico-cultural* (formulación occidental), o *histórico-cultural* (formulación rusa) de Vygotsky, Leontiev, Galperin, Luria, Wertsch y otros, ofrece una alternativa que considera a la cognición como un proceso histórico-culturalmente situado, y a la cultura como un conjunto de prácticas o *escenarios de actividad* donde los sujetos participan y se desarrollan (Wertsch, 1988). Así, la relación cultura-cognición se traduce en la relación entre los *escenarios de actividad*, que se discutirán adelante, y los modos de discurso y de pensamiento asociados a ellos (Cubero, 2000).

Ya Vygotsky (1978) había explorado la relación entre los diferentes niveles de conceptos con los contextos de donde surgen, sean los contextos cotidianos o espontáneos, sean los contextos escolares formalizados. De unos surgen los *pre-conceptos* o *conceptos cotidianos* (pensamiento por *complejos*, *pseudo-conceptos*) y de otros los conceptos



genuinos o *científicos*. Estos últimos se distinguen por su inclusión en un sistema jerarquizado y lógico con otros conceptos, y no implica necesariamente que surjan de problemas científicos. Del hecho de la sistematización de los *conceptos científicos*, Vygotsky infiere su uso consciente; para él entonces consciencia y sistematización se pueden ver como sinónimos. Pero la distinta procedencia de los *conceptos cotidianos* y *científicos* no debe interpretarse como si fueran fenómenos totalmente independientes; más bien, ambos tipos se influyen mutuamente y son necesarios en el desarrollo de las personas, pues las fortalezas y debilidades de los dos se complementan ofreciendo una visión global de desarrollo. La relación entre el tipo de contexto o de actividad y el tipo de pensamiento resultante, esbozada por Vygotsky, fue desarrollada explícitamente por A. N. Leontiev en su *teoría de la actividad*, que ha sido revisada en el apartado de *marco teórico*.

Pero el propio Leontiev afirma que si decimos que un individuo está inmerso en un actividad concreta no nos dice nada acerca de las relaciones específicas entre medios y fines que están implicadas en ella, y sólo nos dice que el individuo se desenvuelve en un contexto histórico-culturalmente determinado. Por eso se justifica la introducción de otro nivel de análisis de la actividad, la *acción orientada hacia un objetivo*. La *acción* puede diferenciarse netamente de la *actividad* si pensamos que la *acción* puede cambiar independientemente de la *actividad*, o también que una *acción* puede contribuir a la realización de *actividades* diferentes: si yo me fijo el objetivo de llegar al punto A y lo hago, mi acción pudo contribuir a cumplir actividades muy distintas, como un juego, una labor escolar o un trabajo. Lo contrario es también cierto: la misma motivación puede dar lugar a objetivos (acciones) diferentes. Pero la *acción* no sólo tiene un aspecto intencional o un objetivo (el *qué* debe hacerse), sino también uno operacional (el *cómo* puede hacerse),

que son las condiciones objetivas para concretarla u *operaciones*, que constituyen un tercer nivel de análisis de la *actividad*. Estas *operaciones* no se definen entonces solamente por el objetivo en sí mismo, sino por las circunstancias objetivas en las que se plasman. Es decir que *la acción realizada se produce como respuesta a una tarea* (Wertsch, 1988).

De estas ideas se desprenden las propuestas de Leontiev, Zinchenko y Wertsch para adoptar como unidad de análisis en la teoría histórico-cultural a la *acción con un objetivo mediada por instrumentos*, que es acorde con la idea de *consciencia* en Vygotsky, y que será adoptada como unidad de análisis en esta tesis. En dicha mediación de instrumentos, en particular Zinchenko no distingue entre la mediación de las herramientas y la de los signos, y en opinión de Wertsch (1988), debería tomarse en cuenta las propiedades específicas de los fenómenos semióticos. El énfasis en la mediación de herramientas o en la de los signos marca justamente la diferencia entre las posturas de Leontiev y de Vygotsky respectivamente.

Las ideas arriba expresadas acerca de una unidad comprensiva de análisis tienen un parangón en la filosofía pragmatista, que podría constituirse en un sustento epistemológico alternativo de las teorías fundadas en la *actividad*. Según Faerna (1996),...*la función cognoscitiva es el lugar donde pretendidamente deben confluir el mundo espiritual del 'sujeto' y el mundo natural del 'objeto', y eso se relaciona con la síntesis que el pragmatismo persigue* (Faerna, 1996, 13). A este respecto, Elizondo (2003) señala que *en la epistemología pragmatista las categorías opuestas de sujeto y objeto pasan a segundo plano, al asignárseles un estatuto derivado, y ceden su lugar privilegiado a la categoría de acción* (Elizondo, 2003, 44). Y esto se basa en la premisa de A.M. Faerna en la que *la*

*acción es necesariamente algo que realiza un sujeto y padece un objeto, y por tanto los presupone* (Faerna, 1996, 15).

Según Wertsch (1997), existen varias explicaciones de la *acción* en las que basar un método histórico-cultural vygotskiano, siendo la más utilizada la de Leontiev, que está emparentada como se ha dicho en otro lugar con la *acción teleológica* de Habermas. Ambas explicaciones de la *acción* tienen la vista puesta en su fin o en la resolución de problemas, y por eso resultan un tanto limitadas para incluir otras dimensiones de la acción. Por eso Wertsch (1997) realza la aportación de Kenneth Burke (1969) y su idea de *acción simbólica* que puede ayudar a comprender las relaciones entre la *acción* y otros conceptos histórico-culturales básicos, particularmente el de *mediación*. En su explicación de la *acción simbólica*, Burke primero distingue la *acción* del mero movimiento, diciendo que la primera es el comportamiento que emplea símbolos en contraste con la acción a-simbólica de los fenómenos naturales. La diferencia entre las posturas *teleológicas* de la acción en Leontiev/Vygotsky y de *acción simbólica* de Burke se hace más clara cuando se considera a la acción desde un punto de vista *dramatúrgico*, según el cual si tenemos un *acto*, implica que tenemos también a un *agente* que actúa en un *escenario* empleando un *medio* o *agencia*. Y el acto sólo puede llamarse como tal si tiene un *propósito*. Estos cinco términos, *escenario, acto, agente, agencia, propósito*, constituyen la *péntada dramatúrgica* de Burke cuyos elementos se relacionan no estáticamente sino en distintas combinaciones de interacción dinámica u oposición dialéctica que posibilita el análisis de una amplia gama de acciones que no puede abordar la *acción teleológica*. Burke dice que los elementos de la *péntada* organizan la acción en formas complejas que hacen que el sujeto de la acción no sea visto únicamente como un mero ente solucionador de problemas. Por tanto, si el énfasis

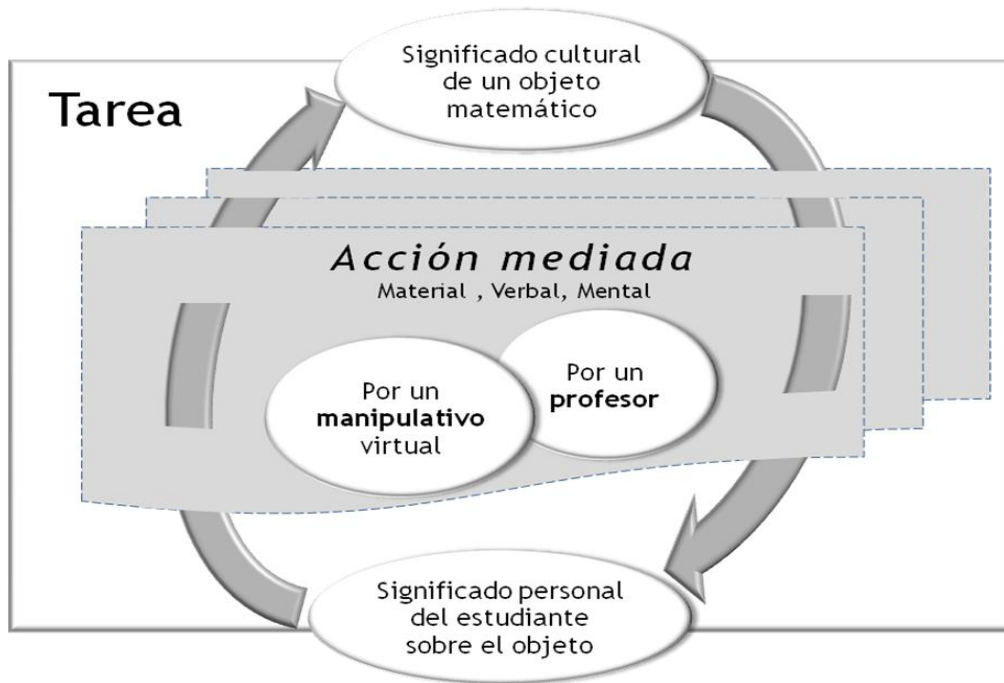
se pone en solamente algunos de los elementos de la *péntada* en detrimento de otros, pueden introducirse algunas limitaciones en el análisis de la actividad, como es el caso de la postura pragmatista aludida arriba, con su inclinación marcada por los *medios* o *agencia* en la actividad, como lo demuestra el nombre mismo de una escuela pragmática como la de Dewey, llamada *instrumentalismo*. Por otro lado, y como contrapartida a la falta de complejidad en la noción de *acción* en Leontiev, para Wertsch, Del Río y Álvarez (1997) debe subrayarse en aquel autor la importancia del hecho de separar distintos niveles de análisis de la actividad para poder situar la *acción* en el contexto de la *actividad*.

La importancia del *escenario* como elemento de la *péntada dramatúrgica* de Burke queda clara en esta cita:

*Al utilizar “escenario” en el sentido de contexto o trasfondo y “acto” en el sentido de acción, se podría decir que “el escenario contiene al acto”. Y al utilizar “agentes” en el sentido de actores...se podría decir que “el escenario contiene a los agentes”. El principio del drama es que la naturaleza de los actos y los agentes debería ser coherente con la naturaleza del escenario...O bien, si así lo preferimos, el decorado (es decir el escenario) contiene la acción de una manera ambigua (en relación a las normas de la acción) y, en el transcurso del desarrollo de la obra, esta ambigüedad se convierte en una articulación correspondiente. La proporción sería: el escenario es al acto como implícito es a explícito (Burke, 1969, 3-7).*

Todas estas consideraciones apuntan al establecimiento de una unidad histórico-cultural de análisis para la investigación desarrollada en esta tesis doctoral. El *escenario de actividad* buscado debe incorporar a la *péntada dramatúrgica* de Burke, que ofrece una alternativa

más rica al escenario de la *acción teleológica* de Leontiev y Habermas. Los elementos de la péntada son: la *acción* generada por una tarea, un *agente* (el estudiante con sus significados personales), una *agencia* o *medio* (manipulativos virtuales prediseñados y la interacción con un profesor acerca del contenido de la tarea) y un *propósito* (la *internalización* del significado cultural pragmático de objetos matemáticos que introducen a la Derivada). Estos elementos confluyen en el *escenario* de la Figura 8. El análisis se centra en la *acción significativa* (que tiene un objetivo) *mediada por instrumentos culturales*, e incorpora relaciones entre aspectos psicológicos, sociales, culturales, antropológicos y semióticos representados en la *Figura 8*.



**Figura 8.** Escenario de actividad y unidad de análisis de esta tesis.

#### II.11.4 La investigación microgenética

El *enfoque histórico-cultural* se aplica al estudio del desarrollo de las funciones mentales humanas en relación a los contextos socio-histórico-culturales que las generan, y considera diferentes escalas temporales o dominios genéticos, según el fenómeno particular que se estudie. Estos dominios son: la *filogénesis*, la *historia cultural*, la *ontogénesis* y la *microgénesis* (Wertsch, 1988), que han sido glosadas en el *marco teórico*. Dado que esta investigación se interesa en estudiar la formación y el uso de ciertas funciones psicológicas o acciones mentales generadas por la acción de un estudiante pre-universitario con manipulativos virtuales computarizados, y que esto sucederá en un lapso corto de tiempo

(en una o dos sesiones de trabajo), el dominio temporal consecuente de la tesis es el *microgenético*.

El trabajo en el dominio *microgenético* descansa sobre un supuesto básico: *es posible comprender muchos aspectos de las funciones mentales sólo si se comprende su origen y las transiciones por las que han pasado* (en Wertsch, 1993, 36). La conceptualización y la medición del cambio a escala *microgenética* son quizá los aspectos más fundamentales de este enfoque plantado en la psicología del desarrollo (Flynn, Pine, Lewis, 2007). Paradójicamente, las aproximaciones metodológicas comúnmente usadas se concentran en medidas estáticas del desarrollo tomadas en intervalos distantes de tiempo, y por eso el estudio del proceso y naturaleza del desarrollo tiene que ser inferido. De ahí la importancia, para esta investigación, de un método que estudie el cambio en el momento en que este ocurre, con una visión *microgenética* o de *microdesarrollo* (ambos términos serán considerados aquí como sinónimos; la justificación para esto se presenta más adelante).

El método que originalmente quería Vygotsky intentaba estudiar un proceso de desarrollo en todas sus fases y cambios, desde el nacimiento a la muerte, y con esto, descubrir su naturaleza. La historia del comportamiento no es sólo un aspecto interesante del desarrollo, sino que es su base auténtica, lo que implica fijar la atención en los procesos, no sólo en los productos; en la explicación, no sólo en la descripción. Esto queda fijado por la frase de que *sólo en movimiento un cuerpo muestra lo que es* (Vygotsky, 1978). Este enfoque en el desarrollo, a los ojos de Vygotsky, es un requerimiento esencial en la psicología experimental. La justificación de una aproximación *microgenética* para observar los procesos de cambio en el desarrollo mental queda manifiesta en el siguiente pasaje:

*Any psychological process, whether the development of thought or voluntary behavior, is a process undergoing changes right before one's eyes. The development in question can be limited to only a few seconds, or even fractions of seconds, (as is the case in normal perception). It can also (as in the case of complex mental processes) last many days and even weeks (Vygotsky, 1978, 61).*

Para capturar el proceso en su movimiento, Vygotsky propone un *método microgenético* (el término *microgenético* es de Wertsch, y es posterior a Vygotsky) en el que los cambios en el desarrollo son provocados en escenarios experimentales. A través de la intervención, el investigador registra los esfuerzos iniciales de los sujetos para resolver un problema que está más allá de sus medios o estrategias actuales. Uno de los métodos de intervención es el de suministrar a esos sujetos medios a través de los cuales el problema puede resolverse, para luego enfocarse en los cambios en el desarrollo que tienen lugar en unas pocas sesiones en las que los aprendices se apropian de nuevas herramientas psicológicas (John-Steiner y Mahn, 1996). El proceso puede captarse con métodos cuantitativos y cualitativos que rechazan las explicaciones estímulo-respuesta y favorecen la naturaleza emergente de la actividad mental; métodos que involucran aspectos dialécticos que concilian las dicotomías y hacen una síntesis de las contradicciones. El tema metodológico es a tal punto importante, que Vygotsky dice:

*The search for method becomes one of the most important problems of the entire enterprise of understanding the uniquely human forms of psychological activity. In this case, the method is simultaneously prerequisite and product, the tool and the result of the study. (Vygotsky, 1978, 65).*



En el caso de esta tesis, la cuestión del doble estatus del método como herramienta y como producto resultó ser muy relevante, tal como se discute en los apartados de Metodología. La experiencia vivida en el curso de la investigación dejó claro que primeramente el conocimiento del método usado originalmente por Vygotsky, llamado de la doble estimulación, y la crítica al mismo hecha entre otros por Leontiev y Galperin, permitió al investigador conocer aspectos sutiles de la teoría histórico-cultural necesarios para aclarar y re-plantear el diseño de la investigación. En el curso de la misma, y al atender la especificidad del objetivo y de las preguntas principal y secundarias, surgió la necesidad de buscar herramientas metodológicas también específicas que se adaptaran mejor a las intencionalidades de la tesis. De aquí que el propio desarrollo de la investigación fue perfilando el método que pudiera responder a sus necesidades, así como también fue perfilando las herramientas específicas de recolección y de análisis de los datos. La interacción entre los planteamientos conceptual y metodológico resultó ser un proceso dialéctico no-lineal que dio como resultado la adecuación y pertinencia del sistema formado por la teoría, la práctica en el escenario de actividad y el objetivo de la investigación. En ese sentido, la búsqueda de método para esta tesis ha implicado el tránsito entre un estatus inicial de requisito, para terminar siendo uno de sus productos principales.

La situación prevaleciente en la investigación usual de la psicología del desarrollo ha sido de dos tipos: por un lado la investigación de las diferencias individuales en algunas habilidades para saber cómo estas se interrelacionan transversal o longitudinalmente, y por otro lado las comparaciones del desempeño en una serie de pruebas en grupos de individuos de diferente edad o diagnóstico clínico. Estos dos tipos de investigación parecen apartarse

de aquella que usaron dos de los fundadores de la psicología del desarrollo, Jean Piaget y Lev Vygotsky (Flynn, Pine y Lewis, 2007).

Es cierto que las investigaciones en psicología del desarrollo han tratado de mejorar sus métodos, haciendo cosas como aumentar el tamaño de la muestra con la que trabajan, adoptar procedimientos rigurosos y hacer reportes detallados que permiten replicación, pero generalmente se concentran en registrar que un cambio ocurrió, pero no en cómo ocurrió, como pretende hacerlo el método microgenético.

En los años recientes, se ha teorizado sobre las discontinuidades en los cambios intra-individuo (van Dijk, van Geert, 2007), y propuesto el uso de un análisis estadístico llamado *cuasi-binomial*, para medir los cambios abruptos que tienen los sujetos ante alguna causa experimental específica (Cheshire, Muldoon, Francis, Lewis, y Ball, 2007). Aunque estos aportes tienen un enfoque un tanto distinto del que tiene esta tesis dado su enfoque experimental de muestras grandes y uso de la estadística, pueden sugerir sin embargo temas de interés a ser contemplados en un análisis más inclinado a enfatizar aspectos cualitativos.

Existe una gran diversidad de temas investigados con el *método microgenético*. En Flynn, Pine y Lewis (2007), se refiere una serie de proyectos, que van desde la teoría de la mente y el control inhibitorio, el razonamiento analógico y una experiencia acerca del entendimiento de la balanza, hasta el conteo y el desarrollo del lenguaje. En esos proyectos se consideran diferentes escalas de tiempo, que va desde la investigación del cambio en un sujeto intento por intento, hasta el estudio de trayectorias de desarrollo medido en semanas o meses. Varían igualmente en el número de sujetos investigados, desde el estudio de un individuo, hasta el de diadas o grupos.

Como señalan Flynn y Siegler (2007), el *método microgenético* puede usarse y ha sido usado por investigadores provenientes de varias tradiciones teóricas, como las del procesamiento de información, de sistemas dinámicos, vygotskiana y piagetiana, para tratar problemas variados como los relativos a la formación del lenguaje, la resolución de problemas, la memoria, el razonamiento, la actividad motriz y otros. Aunque detrás de todo método hay una teoría, y detrás de una teoría hay una filosofía, la teoría y la filosofía son a menudo implícitas, pero en el *método microgenético* se refieren claramente a la primacía de los procesos de cambio más que al estudio de estados fijos.

Los *estudios microgenéticos* pertenecen a dos tipos básicos: los que investigan el cambio que ocurre en forma espontánea, con presentación repetida de pruebas durante el periodo de cambio, y los que inducen el cambio a través de diferentes formas de intervención, como es el caso del fenómeno estudiado en la presente investigación. En la misma referencia (Flynn y Siegler), se hace notar el abanico de resultados del cambio, ya sea dado en puntajes, en el comportamiento abierto o en estilos de explicación.

#### **II.11.5 Características del *método microgenético***

El término *microgénesis* apareció en prensa en 1948 para referirse a un estudio de Heinz Werner acerca de la activación y el proceso de desarrollo de una competencia particular en una forma miniaturizada y acelerada. En tal estudio se mostraba repetidamente un mismo estímulo a los mismos sujetos para medir su discriminación en percepciones auditivas. Pero ese tipo de investigación procede de años atrás, y ya se usaba en los laboratorios de los grupos de trabajo de Piaget y de Vygotsky, autor este último que da crédito al trabajo de Werner (Vygotsky, 1978). En Diriwächter y Valsiner (2006) se

refieren raíces históricas aún más antiguas de esta psicología del desarrollo, como lo son las aportaciones de la *lógica genética* de James Mark Baldwin (de 1906), la Escuela de Würzburg y su estudio de la génesis del fenómeno mental (a partir de 1912), y la llamada *Ganzheitspsychologie* o Segunda Escuela de Leipzig, que trabajaba en temas y época parecidos a los de Baldwin.

En los experimentos llevados a cabo por Vygotsky y sus colaboradores (Vygotsky, 1978), el desarrollo es caracterizado por alteraciones en la estructura del comportamiento de sus sujetos. Las operaciones psicológicas que estos llevan a cabo a través de formas directas de adaptación, se hacen luego a través de medios indirectos. En vez de ver el desarrollo como una gradual acumulación de cambios separados, se le ve como un complejo fenómeno dialéctico caracterizado por la periodicidad, la irregularidad en el desarrollo de las diferentes funciones, la metamorfosis de una en otra, la entremezcla de factores externos e internos, y los procesos adaptativos con los que el sujeto sobrepasa los obstáculos que encuentra. Es decir, que en tal fenómeno conviven y se relacionan los cambios revolucionarios con los evolutivos.

Como Vygotsky ha enfatizado, un mecanismo esencial en el proceso reconstructivo del proceso de desarrollo, es el uso de estímulos artificiales que sirven para controlar el comportamiento del sujeto, primero como medios externos y luego como operaciones internas más complejas. El método de Vygotsky no estudia el funcionamiento cognitivo ofreciendo los medios externos para que el sujeto resuelva exitosamente una tarea, sino que el investigador proporciona estos medios para que el sujeto espontáneamente los aplique en un nuevo método auxiliar o símbolo o algo que el propio sujeto invente, para que los incorpore a sus operaciones de solución de la tarea. Con esto se puede estudiar cómo el

sujeto organiza su actividad con dichos medios, y así trazar el desarrollo de las funciones psicológicas emergentes. Se estudia no sólo el producto final de las operaciones, sino el proceso de formación de la estructura psicológica específica con la que el sujeto organiza su comportamiento, misma que puede captarse con una mayor riqueza y variedad que en el experimento tradicional de estímulo-respuesta.

En la palabra *microgénesis*, la parte *génesis* se usa para representar al cambio, por su acepción de serie encadenada de hechos y de causas que conducen a un resultado, y por eso es usualmente tomada como sinónimo de desarrollo. De ahí que el término *microdesarrollo*, según Flynn, Pine y Lewis (2007), sería más apropiado como nombre del método. Sin embargo, el término *microgénesis* se ha posicionado en la literatura respectiva para referirse al proceso de cambio en habilidades y conocimientos en un periodo corto de tiempo, periodo que sin embargo puede durar segundos o meses, dependiendo de la velocidad de desarrollo de las acciones o procesos estudiados. El *método microgenético* implica el hacer mediciones continuas a los participantes en el curso de la transición que sufren al enfrentar y ejecutar una tarea y, de acuerdo con Wertsch (1988), se usa para documentar la transición entre el funcionamiento inter-psicológico y el intra-psicológico, e involucra el seguimiento minuto a minuto de la formación de un proceso psicológico, detallando las acciones de los sujetos y sus relaciones interpersonales en una escala corta. La única manera de especificar el mecanismo de cambio sería examinar de cerca la naturaleza de la transición.

El *método microgenético* conoce un uso creciente en las dos últimas décadas (Siegler y Svetina, 2002). La razón principal está en la descripción precisa que el método ofrece acerca del desarrollo de la competencia que experimentan los sujetos mientras

ejecutan una tarea. En una analogía útil, el método microgenético se parecería más a la película que a la fotografía de un hecho.

El método *microgenético* puede ofrecer datos valiosos para construir hipótesis acerca de los mecanismos usados por los sujetos. Sólo con una muestra densa tanto de sus mecanismos previos como de los nuevos que están construyendo, podemos aprender algo sobre cuáles componentes obstaculizan el nuevo mecanismo, o de cuáles mejoras a los ya existentes permiten construir componentes esenciales del nuevo, y aún acerca de los mecanismos ilegítimos que desechan. También puede registrar los cambios que ocurren ocasionalmente en ausencia de un motivo externo aparente (Siegler y Crowley, 1991).

El *método microgenético* tiene tres principios básicos (Siegler y Svetina, 2002). El primero es que las observaciones deben hacerse en los periodos de cambio de la competencia estudiada. Los investigadores deben tener un buen indicador de los parámetros del cambio, o sea, de cuándo y bajo qué condiciones ocurre el desarrollo de la competencia.

El segundo principio tiene que ver con una alta densidad de observaciones relativas al cambio. Los estudios *microgenéticos* hacen mediciones regulares para establecer el tiempo y naturaleza del cambio, por tanto permitiendo estudiar la estabilidad, (dis)continuidad y desviaciones del comportamiento estudiado. Las observaciones deben ser suficientemente densas para mostrar los pequeños cambios que sufre la persona en su progreso desde la ausencia hasta el dominio de una competencia. Una característica importante de la investigación *microgenética* es la cuidadosa definición del comportamiento a ser medido. Por ejemplo, si se considera la habilidad aritmética, se podría crear una medida que captara el incremento o decremento de habilidad en la

solución de problemas en diferentes momentos, lo que indicaría que hubo cambios, aunque esa medida podría carecer de poder explicativo para saber *cómo* ocurrió el cambio.

El tercer principio es que las observaciones del comportamiento deben ser intensivamente analizadas para establecer los procesos subyacentes del cambio. Datos muy detallados permiten analizar la actividad intento por intento o sesión por sesión de los sujetos, para ilustrar los cambios en sus estrategias, sea a través de sus explicaciones, de su comportamiento o por ejemplo en la correspondencia gestos-discurso.

Otra característica importante del *método microgenético* es que permite ver el cambio tal como es en la realidad, desordenado y hasta caótico, a diferencia de como lo presenta un estudio longitudinal, con resultados ordenados que no traducen las condiciones reales. Permite también identificar los cambios repentinos y discretos, suaves y graduales, y las regresiones, avances y periodos de equilibrio; y lo que es más importante, si diferentes individuos siguen o no un mismo patrón de transiciones. Estas distintas formas son críticas en la transición, pues indican cómo progresa la persona hacia niveles más sofisticados de la competencia. Estas transiciones pueden capturarse *microgenéticamente* al manifestarse como cambios puntuales en el comportamiento, incluso el no-verbal, como en los gestos.

Tomando en cuenta las características del *método microgenético* comentadas arriba, resulta ociosa la discusión acerca de la preeminencia del abordaje metodológico cualitativo como contrapuesto al cuantitativo y viceversa, pues como dicen Valsiner y Diriwätcher (2006), *what contemporary science of psychology needs is clarity about how to construct adequate methods for specific research purposes and not a discussion about whether one*

*or another category of methods is better (or worse) by virtue of their ontology* (Diriwätcher y Valsiner, 2006, 2).

### **II.11.6 Dimensiones para observar el *proceso de cambio***

Como se ha dicho, la *investigación microgenética* rastrea la evolución del desempeño del individuo a través del periodo completo de cambio, captando datos que no pueden obtenerse con investigación basada en otros métodos. En esta tesis se ha hecho una recopilación de *dimensiones del cambio* a observar que provienen de distintas fuentes, siendo la principal los textos del mismo Piotr Galperin, pero también de la interpretación o extensión a estos hecha por varios autores como Van der Heijden (1994); Kuo, Chang y Wang (2002); Siegler y Svetina (2002); Mortimer (2000); Ortíz y Chávez (2008); Talizina (en Ortíz y Chávez, 2008), y Schunk, D. (1997). Otras dimensiones y criterios observables provienen tanto de la tesis doctoral de Falcade (2006) como de la investigación de Naidoo (2007). Todas las *dimensiones de cambio* constituyen indicadores de los procesos de desarrollo histórico-cultural, como lo son la transición entre la hetero y la auto-regulación del sujeto, la transición entre los procesos inter-psíquico al intra-psíquico, la descontextualización de los instrumentos mediadores, la abreviación gradual de la expresión del significado de un signo característica del proceso semiótico y otros. Las dimensiones del cambio se erigen como categorías pre-determinadas con las cuales se analiza el proceso en la actividad del escenario, y junto con las funciones semióticas que analizan el producto, constituyen lo que Cisterna (2005) llama *categorías apriorísticas* y Elliot (1990) *conceptos objetivadores* para analizar el cambio en el escenario de actividad de esta tesis.



A continuación se glosarán primero una a una las dimensiones del cambio, y después se presentará la *Tabla 2* en la que aparecen en forma sucinta tanto las propias dimensiones como sus correspondientes características observables.

#### *Grado de abstracción de las acciones*

Corresponde a los niveles *material, verbal y mental* ya comentados en la teoría de Galperin.

#### *Función de la acción*

Según Galperin, las acciones pueden tener tres funciones características: de *orientación*, en la cuál aparecen cuestionamientos del sujeto acerca de la manera en la que llevará a cabo la acción; de *ejecución*, que es la solución efectiva del problema o situación; y acciones de *control*, en la que el sujeto se cuestiona acerca de la adecuación o corrección de su respuesta al problema o situación.

#### *Grado de generalización o de amplitud en el discurso*

La *amplitud* del cambio se examina usualmente a través de presentar a los sujetos una experiencia instructiva sobre una tarea y en determinar si el aprendizaje en ella implica aprendizaje en otras tareas. Esta dimensión proviene de Galperin y es un tema que se conecta con el de la relación entre los cambios a corto y largo plazo, o sea, entre la *microgénesis* y la *ontogénesis*. También está relacionado con el tema de la descontextualización de los mediadores semióticos, de la que el ejemplo más claro es el habla, en donde una palabra primero puede tener una función indicativa y luego simbólica o generalizada indispensable en la interacción social.

El proceso de generalización de una función psicológica superior en un sujeto puede ser registrado a través de criterios lingüísticos, tal como lo propone Mortimer (2000), quien hace una aportación útil a este propósito que es aprovechada en esta tesis. Este autor establece una graduación que empieza en la *descripción*, pasa por la *explicación* y termina en la propia *generalización* de experiencias de aprendizaje particulares. Cada una de estas categorías de expresión pueden a su vez ser referidas a un nivel *perceptual/empírico* o a un nivel *teórico*. De manera que podemos disponer de seis grados de expresión de las funciones psicológicas, mismas que serán analizadas en el apartado siguiente. Hay que recordar en este punto que una característica distintiva de las funciones psicológicas superiores, es que son creadas en el movimiento de *contextualización-descontextualización-recontextualización* de los signos involucrados en los procesos psicológicos, cosa a la que, según Mortimer (2000), puede seguirse la pista lingüísticamente a través justamente del registro de la transición *descripción-explicación-generalización*. Esta graduación también traduce el tránsito de las funciones psicológicas superiores desde las *rudimentarias* a las *avanzadas*.

Una *descripción empírico/perceptual* es una declaración o expresión que simplemente describe el fenómeno en términos de aspectos observables. Una *descripción teórica* va más allá del fenómeno para describirlo en términos de entidades que no están en el fenómeno mismo, cosa que caracteriza a los sistemas simbólicos; pero no deja de ser una descripción, pues aún no se habla aquí de un mecanismo que explique el fenómeno.

La categoría de *explicación* se aplica a expresiones que establecen explícitamente relaciones entre entidades y conceptos, comportando alguna forma de modelo o mecanismo de un fenómeno (Mortimer, 2000). La *explicación* va más allá de la *descripción*

estableciendo una relación causal, aunque se sigue refiriendo todavía al mismo fenómeno específico que está frente a los ojos.

En términos lingüísticos, puede decirse que la diferencia entre una *descripción teórica* y una *explicación*, es que la primera atribuye al sistema entidades creadas intralingüísticamente, y la segunda le atribuye al sistema un mecanismo causal, unas relaciones causa-efecto entre esas entidades. Un símbolo es atribuido al sistema, mismo que es usado como un referente extralingüístico. Una representación icónica del fenómeno es fundamental para transformar entidades no observables en referentes extralingüísticos.

Finalmente, la *generalización* va más allá de la explicación del fenómeno particular, y se refiere a una propiedad *general* que se induce desde él. Ya no se hace referencia al fenómeno concreto sino a sus propiedades en lo general.

Lingüísticamente, la *generalización* completa el movimiento progresivo desde la *descripción* y la *explicación*, hacia la *descontextualización-recontextualización*, o sea, hacia una relación puramente simbólica o intralingüística entre signos, sin usar referentes de los fenómenos u objetos extralingüísticos. Como se ha dicho, el movimiento *descripción-explicación-generalización* traduce también el paso de las funciones psicológicas superiores *rudimentarias* a las *avanzadas*. Como en el caso de la *descripción*, la *explicación* y la *generalización* pueden ser, como se había dicho, de nivel *empírico/perceptual* o de nivel *teórico*.

Las implicaciones metodológicas de esta manera de registrar el nivel de desarrollo de una función psicológica superior son grandes, pues ofrecen unas categorías para caracterizar, a través del lenguaje, las transiciones genéticas que experimentarán los sujetos

al enfrentarse con tareas diseñadas justamente para inducir esos cambios. Explorar cómo estos sujetos se mueven a través de esas categorías, ayuda a entender la dinámica *microgenética*.

Hay un paralelismo entre las categorías de Mortimer con los tipos de generalización que propone Radford (2003), quien establece una distinción entre etapas pre-simbólicas y simbólicas en los procesos semióticos de generalización. Las categorías de Radford son: la *generalización factual* (corresponde a la descripción perceptual), la *generalización contextual* (corresponde a la explicación perceptual y teórica), y *generalización simbólica* (corresponde a la generalización propiamente dicha).

#### *Grado de explicitación u objetivación del discurso*

En el discurso oral y escrito a propósito de algún tema matemático, es posible observar diferentes *niveles de objetivación* o de *explicitación* de los objetos matemáticos y de las *funciones semióticas* en construcción. De ahí la necesidad de clasificar estos enunciados o partes del discurso según unas categorías de explicitación, como las que propone Falcade (2006). Caracterizar un objeto matemático no tiene la misma fuerza que definirlo, aunque en un proceso de *semiosis* es crucial hacer tal *caracterización*. Las categorías propuestas sirven pues para modelizar la evolución que va teniendo la construcción de un objeto matemático o de una función semiótica. De esta manera, todas las palabras o frases que conlleven por ejemplo la idea de *límite* (en el contexto del Cálculo), pueden portar la misma etiqueta semántica, aunque en diferentes niveles de explicitación.

*Ejemplificar* es representar una idea a través de un caso o ejemplo de ella. Las *ejemplificaciones*, como se verá con las *interpretaciones*, conciernen al establecimiento de una relación entre dos signos simples, uno de los cuales proviene directamente de la actividad con el manipulativo y tiene un nombre propio. Las *ejemplificaciones* reconocen la pertenencia de un signo particular a una clase dada de signos, de los que uno de ellos puede ser visto como un representante. Como se verá adelante, las *ejemplificaciones* pueden ser también vistas como una asignación donde el objeto a ejemplificar está contenido en una *definición*, y son de la misma naturaleza que las *interpretaciones*, pero estas hacen referencia a universales, mientras que las *ejemplificaciones* se refieren a directamente a una actividad específica en la computadora. Pueden servir para validar una interpretación o para particularizarla en la computadora.

Las *interpretaciones* apuntan a establecer explícitamente un lazo entre dos familias de signos que pertenecen a campos semánticos diferentes. No se trata de establecer una identidad entre dos objetos, sino una equivalencia o correspondencia entre dos mundos expresada en forma general. Los indicadores de una *interpretación* pueden ser los nombres comunes de una cosa, expresiones como “esto corresponde a...”, o los enunciados condicionales que establecen la correspondencia pero no-coincidencia entre dos cosas puestas en relación.

La *caracterización* apunta a arrojar luz sobre ciertas características salientes y definitorias de un objeto susceptibles de ser interpretadas en términos *proto* o *para-matemáticos*. Pueden ser reveladas consciente o inconscientemente por el profesor o por un alumno y sirven para enriquecer el campo semántico de un objeto o su potencial semiótico. En la experiencia de Falcade (2006), a veces las *caracterizaciones* no surgen directamente

sino que salen de la interacción, no necesariamente organizada, de varios enunciados dados por varias personas. Como con las palabras, tienen un aspecto denotativo (dan significado a un objeto) y también connotativo (conllevan además otra intención). Consisten en todas las inclinaciones o tentativas, más o menos explícitas, hacia una *definición*, pero no son una *definición* porque el profesor no intenta ser explícito en ese momento, o porque el que está hablando no tiene clara la consecuencia última de lo que está diciendo en ese momento. La *definición* empezaría en el momento donde se comienza a tener consciencia de esa consecuencia. En la mayoría de los casos, las *caracterizaciones* se identifican a posteriori, porque sus elementos son muy volátiles y las expresiones utilizadas son cada vez diferentes. Hay que buscar las invariantes semánticas en los registros del discurso. Los criterios para reconocer una *caracterización* sería los siguientes (Falcade, 2006): brotan de la interacción de varios enunciados; se relacionan más con el uso del instrumento que con el significado estrictamente matemático; revelan la voluntad del profesor de retomar intencionalmente la caracterización involuntaria de los alumnos o de poner en evidencia una característica saliente de la actividad, susceptible de expresarse en términos matemáticos.

Las *definiciones* se refieren a un objeto que es la meta del aprendizaje, y apuntan a explicitar, precisar y delimitar intencionalmente el significado *proto o para-matemático* del objeto. No se trata de definiciones en el sentido matemático, sino de signos asociables a un significado, de asignar una palabra a un objeto que era desconocido o poco conocido antes. Una definición puede también apoyarse en una metáfora.

A través de los cuatro grados de objetivación de las *funciones semióticas* relativas al objeto de aprendizaje, puede captarse el nivel de apropiación que de este tiene un sujeto, es

decir, puede captarse el grado de correspondencia entre el *significado personal* y el *significado institucional* que el sujeto tiene del objeto meta.

#### *Grado de independencia de la acción del sujeto*

Está caracterizado por el tipo de mediación del profesor o tutor que necesita el sujeto en un momento dado de la experiencia de formación de acciones mentales en cada una de las etapas de *orientación*, de *ejecución* o de *control*. Se emplearán en esta tesis las categorías o grados de mediación propuestos por Kuo, Chang y Wang (2002) a propósito de la *evaluación dinámica*, un tema muy cercano a la metodología de Galperin, a saber: *mediación de orientación* (o de pre-test), en la que se dan al sujeto las instrucciones y condiciones de la tarea, se lo motiva a seguirlas y se ofrecen pistas para emprenderla; en la *mediación suave* se induce al sujeto a supervisar sus respuestas y se ofrece retroalimentación inmediata a sus acciones con el fin de estimular un comportamiento auto-regulado; la *mediación moderada* consiste en ofrecer ejemplos y mostrar estrategias útiles a la tarea para que el sujeto las considere y seleccione una por su cuenta; en la *mediación fuerte* se demuestra directamente la estrategia, y se asegura que el sujeto la aplique para resolver exitosamente el problema o situación; también se ofrecen varias estrategias para que el sujeto escoja la que acomoda más a su estilo cognitivo. En la *mediación de control* (o de post-test), se deja al sujeto reportar verbalmente el proceso de solución del problema, así como analizar sus fallas y proponer formas de modificar su comportamiento. También se le motiva a explorar un problema nuevo en forma libre e independiente. Esta dimensión traduce la transición entre el desempeño inter-psíquico y el intra-psíquico del sujeto.

#### *Grado de abreviación de las operaciones finalmente realizadas*

Aquí se observan las operaciones efectuadas y automatizadas en cada acción. El grado de abreviación depende de la acción o bien del objeto de la misma. La acción puede requerir del ejercicio de todas las operaciones que originalmente la conformaban, y posteriormente algunas de ellas pueden agruparse o incluso obviarse en una ejecución más y más automatizada.

#### *Grado de control o de auto-regulación del desempeño*

Se trata aquí de observar el tipo de errores que comete el sujeto en la tarea, pero no tiene que ver con los provenientes de la falta de conocimiento previo, sino con las omisiones y descuidos en la expresión oral o escrita. El control o auto-regulación se detecta si el sujeto se impone metas, emprende acciones hacia ella, supervisa la adecuación de las conductas que lo llevan a alcanzarla y finalmente puede evaluar todas sus acciones. Esta dimensión traduce la transición entre el hetero y el auto-control del sujeto.

#### *Grado de flexibilidad en el desempeño*

Se determina por el uso de diferentes aproximaciones a diferentes problemas que el sujeto hace con el fin de lograr alguna mejora en la acción. El sujeto puede aplicar la misma estrategia aprendida a todos los problemas similares que enfrenta, o bien puede cambiar de estrategia según los diferentes problemas para lograr una mayor eficiencia de su acción.

#### *Grado de entendimiento o insight en la acción*

Grado en que las acciones están basadas en las propiedades relevantes y esenciales de la acción. Se manifiesta con el tipo de errores repetidos en la solución de problemas semejantes. Se trata aquí de observar los errores estructurales, aquellos que no tienen que



ver con la pura ejecución o que no son errores arbitrarios o azarosos. La atención está en si el sujeto repite o supera los errores estructurales cada vez que enfrenta un tipo de problema.

#### *Grado de consciencia o despliegue de la acción*

Es el grado en el que el sujeto es capaz de dar cuenta de sus acciones, principalmente en modo verbal. Se detecta en el uso del lenguaje en relación a la acción, en la completez, inteligibilidad y claridad de sus expresiones. También en la calidad de los juicios emitidos por el sujeto cuando compara la solución de la tarea dada con la solución propia. Y finalmente con la claridad del sujeto acerca del tipo de error cometido.

De cada una de estas dimensiones se hace un seguimiento en cuanto a la:

- *Trayectoria de la dimensión de cambio,*
- *Velocidad o razón de cambio,*
- *Al origen o fuente de los cambios observados en la experiencia de internalización.*
- *Variabilidad de los rubros anteriores en diferentes sujetos.*

Se glosará brevemente cada una de estas revisiones a las dimensiones del cambio.

#### *Trayectoria del cambio*

El análisis del cambio involucra la identificación de las secuencias regulares en las estrategias o las representaciones, y muestra si hay cambios cualitativos (distintos tipos de conocimiento o habilidad) y cuantitativos (aumento en la rapidez o en la precisión) en el sujeto. También documenta la estabilidad o las regresiones en su desempeño y las etapas de

conocimiento antes de la plena competencia (Flynn y Siegler, 2007). Estas trayectorias suelen ser complejas, sutiles y graduales (Chetland y Fluk, 2007), y no pueden ser captadas con los métodos transversales. Un ejemplo es el del descubrimiento de técnicas sofisticadas en el sujeto que sin embargo no produce cambio en sus estrategias, o el caso de la fluctuación de la presencia de estrategias correctas e incorrectas en el tiempo.

#### *Razón de cambio y grado de estabilidad*

La *razón de cambio* implica la cantidad de tiempo o experiencia antes de que la nueva estrategia aparezca, y la cantidad de tiempo o experiencia en la que esta se implementa y se estabiliza en otros problemas del mismo dominio. Por lo general, las situaciones experimentales para medir la *razón de cambio* pasan por evaluar varias sesiones separadas un tiempo, con varios intentos para resolver una tarea del sujeto en cada sesión. En la investigación de Tunteler y Resing (2007) respecto al razonamiento analógico en niños de 5 a 7 años, la *razón de cambio* en las primeras sesiones es muy lenta, y se acelera marcadamente en las sesiones posteriores. Estos autores concluyen sin embargo que el cambio se caracteriza por ser gradual y lleno de avances y retrocesos, así como por estar influenciado por la diferencia de edad en los niños, lo que los diferencia en la capacidad de generalizar las habilidades analógicas.

#### *Variabilidad*

La *variabilidad* es un fenómeno importante, y no una molestia o problema que debe minimizarse o como un error, como lo ven otros métodos de investigación. La *microgénesis* se interesa en identificar aspectos de la irregularidad del cambio en las otras dimensiones: *trayectoria, razón y amplitud*. La *variabilidad* puede presentarse en el comportamiento de

un sujeto que usa una estrategia sofisticada en un problema y otra menos sofisticada en otro similar. Puede haber una gran variabilidad en unas etapas y otra muy corta en otras estudiando el mismo concepto. La variabilidad puede darse entre grupos, como en el caso de sujetos que muestran una adaptación gradual a una nueva estrategia mientras otros se adaptan en forma abrupta. Niños de la misma edad pueden mostrar diferentes estrategias para resolver el mismo problema. Se estudia la continuidad y las discontinuidades en los procesos de cambio.

*Fuente*

La fuente se refiere a la causa o al juego de causas predominantes que generan un cambio en el transcurso de una experiencia o de una dinámica como la que aquí se investiga.

La *Tabla 2* muestra la información concentrada sobre las dimensiones del cambio y sus características observables.

<b>Dimensión del cambio a observar y autor</b>	<b>Criterio</b>	<b>Característica observable</b>
<b>Grado de abstracción de la acción</b> <i>Piotr Galperin</i> <i>(Tipos de acción)</i>	Acción material	Manipulación física de objetos (el manipulativo)
	Acción verbal	Se prescinde del manipulativo y se emplea en su lugar el lenguaje comunicativo e interno
	Acción mental	Se prescinde del manipulativo y del lenguaje comunicativo
<b>Función de la acción</b> <i>Piotr Galperin</i> <i>(Propósito general de la acción)</i>	Acciones de orientación	Cuestionamientos acerca de la manera de aproximarse a algún problema. Maneras en que el aprendiz aprende en el curso de manipulaciones sobre conceptos de requisito a las tareas.
	Acciones ejecutivas	Solución efectiva del problema
	Acciones de control	Cuestionamientos acerca de la corrección de la respuesta. Maneras en que el aprendiz se orienta en problemas semejantes
<b>Grado de</b>	Descripción	Usa referentes presentes en el manipulativo

<p><b>generalización o amplitud del discurso</b>  <i>Piotr Galperin.</i>  <i>Los criterios son de Mortimer.</i>  <i>(Indica la contextualización-descontextualización-recontextualización de los mediadores semióticos)</i>  <i>(Tránsito de las funciones rudimentarias a las avanzadas)</i></p>	perceptual	
	Descripción teórica	Usa referentes que no están visibles, y utiliza relaciones intralingüísticas entre signos que caracterizan el sistema del manipulativo
	Explicación perceptual	Establece explícitamente relaciones causales entre entidades y conceptos, comportando alguna forma de modelo o mecanismo del fenómeno observable en el manipulativo
	Explicación teórica	Establece explícitamente relaciones causales entre entidades y conceptos, comportando alguna forma de modelo o mecanismo hecho de relaciones entre signos
	Generalización perceptual	Se refiere a una propiedad general que se induce desde el manipulativo
	Generalización teórica	Se refiere a una propiedad general más allá del contexto del manipulativo, entre signos
<p><b>Grado de explicitación del discurso</b>  <i>Falcade</i>  <i>(Grado de correspondencia entre el significado personal y el institucional)</i></p>	Ejemplificación	Representa una idea a través de un caso o ejemplo de ella.
	Interpretación	Establece explícitamente un lazo de equivalencia o correspondencia entre diferentes familias de signos. Se expresa como “ <i>esto corresponde a...</i> ” o “ <i>se parece a...</i> ”.
	Caracterización	Señala características salientes y definitorias de un objeto <i>proto</i> o <i>para-matemático</i> . Inclinaciones o tentativas hacia una <i>definición</i> .
	Definición	Explicita, precisa y delimita el significado <i>proto - matemático</i> del objeto. Asigna una palabra a un objeto que era desconocido o poco conocido antes.
<p><b>Grado de independencia de la acción del sujeto</b>  <i>Van der Heijden.</i>  <i>Los criterios son de Kuo, Chang y Wang.</i>  <i>(Grado de la tutoría y de la mediación del profesor)</i></p>	Mediación de <i>orientación</i> del profesor	Se explican las instrucciones y se motiva al sujeto a seguirlas o intentarlas
		Se dan pistas al sujeto para que responda a las preguntas
	Mediación de <i>ejecución</i> suave	Se recuerda al sujeto supervisar las respuestas para ayudarlo a tener un comportamiento auto-regulado
		Se da retroalimentación inmediata al sujeto para reforzar el comportamiento auto-regulado
	Mediación de <i>ejecución</i> moderada	Se introducen estrategias útiles para que el sujeto seleccione alguna y dé ejemplos
		Se deja al sujeto seleccionar la estrategia por sí mismo
	Mediación de <i>ejecución</i> fuerte	Se demuestra la estrategia directamente
		Se ofrecen ejemplos y se asegura de que los sujetos usen con éxito la estrategia para resolver el problema
		Se intentan varias estrategias para ayudar al sujeto a encontrar la que se acomode a su estilo cognitivo
		Se detiene la mediación si el sujeto intenta varias aproximaciones pero no resuelve el problema
Mediación de <i>control</i>	Se deja al sujeto reportar verbalmente el proceso de solución del problema	

		Se deja al sujeto analizar la razón de las fallas en la solución
		Se deja al sujeto que diga la manera de modificar
		Se motiva al sujeto a explorar los problemas independientemente
<b>Grado de abreviación de las operaciones</b> <i>Piotr Galperin</i> (Fusión y reducción de las operaciones finales)	Observación de las operaciones efectuadas y automatizadas. Depende de la acción o el objeto.	Moviliza todas las operaciones originales requeridas por la acción
		Agrupar o fusiona algunas operaciones
		Agrupar o fusiona todas o casi todas las operaciones
<b>Grado de atención (auto-regulación) de la acción del sujeto</b> <i>Van der Heijden</i> (Transición entre el hetero y el auto-control)	Observación. Separar los errores de falta de conocimiento previo con los de atención. Omisiones, descuidos en la escritura	Establece metas
		Emprende acciones hacia la meta
		Supervisa la adecuación de las conductas
		Evalúa sus acciones
<b>Grado de flexibilidad de las operaciones</b> <i>Van der Heijden</i>	Uso de diferentes aproximaciones a diferentes problemas para lograr una mayor eficiencia en la acción	Aplica la misma estrategia en todos los problemas
		Cambia de estrategia en los diferentes problemas para lograr una mayor eficiencia de la acción
<b>Grado de entendimiento (insight) en la acción</b> <i>Piotr Galperin</i> <i>Los observables son de K. Naidoo</i>	Grado en que las acciones están basadas en las propiedades relevantes y esenciales de la acción. Se manifiesta con el tipo de errores repetidos o no en la solución de un problema semejante	Repite los errores estructurales (no ejecutivos ni arbitrarios) al resolver un problema semejante
		Supera los errores estructurales (no ejecutivos ni arbitrarios) al resolver un problema semejante
<b>Grado de consciencia (despliegue) de la acción</b> <i>Piotr Galperin</i>	Grado en el que el sujeto es capaz de dar cuenta de sus acciones, principalmente en modo verbal	Uso del lenguaje en relación a la acción. Completez, inteligibilidad y claridad de su expresión
		Calidad del juicio del sujeto cuando compara la solución dada con la propia
		Claridad del sujeto sobre el tipo de error que ha cometido
<b>Grado de automatización de las operaciones</b> <i>Piotr Galperin</i>	Está formado por a) el grado de abreviación y por b) el grado de abstracción	

Tabla 2: dimensiones del cambio y sus características observables

El seguimiento de la evolución o del cambio que experimenta un sujeto en cada una de estas dimensiones se hace a través de los criterios consignados en la *Tabla 3*:

<b>Trayectoria</b> Siegler	Identificación de las secuencias regulares en las estrategias, las representaciones del sujeto o las dimensiones de cambio. Muestra si hay o no cambios cualitativos y cuantitativos en el sujeto. Documenta la estabilidad o las regresiones en su desempeño y las etapas de conocimiento antes de la plena competencia.
<b>Razón de cambio y grado de estabilidad</b> Siegler	Cantidad de tiempo o experiencia en la que la nueva estrategia se implementa y se estabiliza en otros problemas del mismo dominio.
<b>Variabilidad</b> Siegler	Variabilidad en la razón de cambio, trayectoria y amplitud en distintos sujetos.
<b>Fuente</b> Siegler	Causa o razón aparente del cambio.

**Tabla 3.** *Criterios de seguimiento de las dimensiones de cambio*

[\(A la tabla de contenidos\)](#)

### II.11.7 El rol dual del profesor-investigador

La investigación emprendida en esta tesis tiene sus orígenes en la experiencia previa del investigador como profesor de matemáticas por 25 años. El rol de representante de la cultura matemática a la cual se trata de acercar al sujeto en la experiencia estudiada, es jugado aquí por el propio investigador. Se argumentará acerca de las repercusiones de este rol dual, comenzando por unas palabras de Paulo Freire a ese respecto:

*No hay enseñanza sin investigación ni investigación sin enseñanza. Esos quehaceres se encuentran cada uno en el cuerpo de otro. Mientras enseñó continúo buscando, indagando. Enseño porque busco, porque indagué, porque indago y me indago. Investigo para comprobar, comprobando intervengo, interviniendo educo y me educo. Investigo para conocer lo que aún no conozco y comunicar o anunciar la novedad (Freire, 2004).*

Para Gutiérrez (2008), la división entre investigadores de la pedagogía y los profesores que enseñan en el aula, es artificial. Esa división implica que el profesor es un técnico que no puede participar en la generación de conocimiento acerca de su propio trabajo, y connota una posición poco afortunada de poder del *investigador* sobre el *investigado*. Los investigadores con frecuencia presentan los resultados de sus experiencias a otros investigadores a espaldas de los profesores y de las preocupaciones concretas de la práctica educativa. El cambio que Gutiérrez (2008) propone pasa por que los profesores ganen en auto-dirección a través de la reflexión autónoma, la participación y la colaboración en el trabajo y en la investigación, que es justamente una de las intencionalidades implícitas de esta tesis.

La relación entre práctica profesional, ciencia aplicada y las técnicas basadas en la investigación, según Schön (1987), colinda con el arte, y se puede decir que hay un arte para definir un problema, un arte para su puesta en práctica y un arte para la improvisación, todos ellos necesarios para mediar entre la ciencia y la práctica.

Cuando en una investigación se pone la atención en la solución de un problema, a menudo se obvia el planteamiento del mismo, o sea, las decisiones que se toman y los

medios que se usan, como piensa Shanon (1983). Los problemas no están dados en el mundo real, sino que son contruidos a partir de situaciones problemáticas inciertas o enigmáticas. En el caso de la presente investigación, estas decisiones y medios iniciales son establecidos por las situaciones problemáticas surgidas en la experiencia del investigador como profesor en activo. En consecuencia los docentes deben asumir la reflexión sobre los aspectos particulares de una situación concreta del aula, pues las explicaciones generalizadas tardan en llegar o no abordan la realidad específica que se tiene que explicar y solucionar en la cotidianidad académica (Célica Cánovas, comunicación personal, 29 de octubre de 2010).

Para McKernan (1999), no es suficiente que se estudie el currículum (los problemas educativos), sino que es preciso que lo estudien los profesionales (los profesores), pues ellos pueden descubrir lo que necesitan saber para resolver sus dificultades particulares. Por eso es hora de que la investigación se devuelva a los profesionales, para que ellos definan el problema y comprometan a los investigadores externos en su investigación sobre una base de igualdad. Es contundente y justificada la siguiente afirmación de McKernan, que tiene especial relevancia en esta tesis: la investigación debe estar controlada por los profesionales, ya que se basa en su trabajo. De esta manera, el lenguaje de la investigación debe ser o estar cerca del lenguaje de los participantes en ella, y el profesor, si ha de llamarse como tal, debe ser un observador participante. De aquí que si la enseñanza quiere verse como una profesión, debe dejar de ser una distribuidora de conocimientos para poder convertirse en productora, o sea, que la actividad investigadora es condición necesaria para el profesional.



Finalmente, ya que una investigación no parte de la nada sino de alguna posición, como afirman Glaser y Strauss en su modelo circular de investigación, los supuestos teóricos sobre los que arranca esta tesis constituyen una versión preliminar de la manera de comprender el objeto que estudia el investigador. De esta forma, la teoría implícita producto de la experiencia del investigador como profesor en el caso de esta tesis, es la versión preliminar de su objeto de estudio, y ha influido para establecer tanto el repertorio de prácticas culturales que se pretende formar en el sujeto, como el diseño y contenido de los manipulativos virtuales encargados de lograrlo, si bien estos elementos no están desconectados de las prácticas y contenidos consignado en los textos contemporáneos de Cálculo, como los de Edwards y Penney (1987) y Larson, Hostetler y Edwards (2006). En este sentido, la interacción de los roles de profesor y de investigador en la misma persona, resulta así fructífera.

## **II.12 Reformulación de las preguntas y formulación explícita del objetivo de investigación después de la revisión teórica**

Habiendo revisado los aspectos teóricos que fundamentan el planteamiento de la tesis, procederemos a re-formular las preguntas de investigación en términos de los conceptos ahí estudiados. Asimismo se hará una formulación explícita del objetivo de investigación igualmente en términos teóricos.

La pregunta principal es:

- ¿Cómo es el proceso microgenético de internalización de las funciones semióticas que caracterizan al significado de objetos matemáticos que introducen a la Derivada en un estudiante pre-universitario, a través de la mediación tanto de la acción con manipulativos virtuales computarizados diseñados para tal fin como de la interacción con un profesor?

La tesis tiene como **objetivo de investigación**:

- Analizar, describir y explicar el proceso microgenético de *internalización* de las *funciones semióticas* que caracterizan al *significado* de objetos matemáticos que introducen a la Derivada en un estudiante pre-universitario con la mediación tanto de manipulativos virtuales computarizados como de la interacción con un profesor.

Preguntas secundarias:

En orden a responder la pregunta principal, se plantea una serie de preguntas secundarias.

Respondidas *a priori* en el *marco teórico*:

- *¿Qué papel juega el uso de herramientas culturales en el desarrollo psicológico de las personas?*
- *¿Qué tipo de acciones pueden promover el aprendizaje y el desarrollo psicológico?*
- *¿Cómo se caracteriza el significado de los objetos matemáticos?*
- *¿Cómo se caracteriza un manipulativo virtual interactivo?*

A responder *a posteriori* en el análisis:

- *¿Cómo es la trayectoria, la razón de cambio, la fuente y la variabilidad de los cambios evolutivos que experimenta un sujeto cuando enfrenta una serie de tareas pre-diseñadas que usan manipulativos virtuales para generar el significado de objetos matemáticos, esto en cada una de las siguientes dimensiones?:*
  - *Grado de abstracción de la acción del sujeto (material, verbal, mental)*
  - *Función de la acción (de orientación, de ejecución o control)*
  - *Grado de generalización o amplitud de su lenguaje*
  - *Grado de explicitación u objetivación del significado meta*
  - *Grado de independencia de la acción del sujeto*
  - *Grado de abreviación de la acción final*
  - *Grado de atención o auto-regulación del sujeto*
  - *Grado de flexibilidad de las estrategias utilizadas por el sujeto*
  - *Grado de entendimiento o insight en el sujeto*
  - *Grado de consciencia o despliegue de la acción*
- *¿Cuáles son los principales obstáculos en el proceso de formación de las acciones mentales?*
- *¿Cuáles tipos de mediación del profesor son más efectivas en la generación de las funciones semióticas?*

### II.13 Supuestos o hipótesis de trabajo de la investigación

Considerando la intencionalidad de esta investigación así como la base teórica que la fundamenta, podemos establecer las siguientes hipótesis de trabajo o supuestos que darán sentido a las actividades de esta investigación:

- a) El significado institucional de los objetos matemáticos es el sistema de prácticas culturales que han sido elaboradas a propósito de ellos, y se caracterizan a través de un conjunto de *funciones semióticas* que interrelacionan los componentes de ese significado, que son: los lenguajes de representación (verbal, numérico, gráfico, simbólico o algebraico, gestual), los conceptos y definiciones involucrados, las proposiciones que se establecen entre ellos, los algoritmos, los argumentos de validación y las situaciones problemáticas donde todos estos elementos interactúan.
- b) Las *funciones semióticas* relativas a los objetos matemáticos que serán *internalizadas* por un sujeto, son *procesos psicológicos superiores* tal como son definidos por Lev Vygotsky.
- c) Las *funciones semióticas* que caracterizan al significado de los objetos matemáticos se *internalizan* en el aprendiz a partir de acción material significativa sobre manipulativos virtuales prediseñados, seguida de acción en el nivel verbal y finalmente mental externalizada, todas con el mismo objetivo, que es el sistema de prácticas culturales que caracteriza a los objetos.
- d) La *acción* a nivel *mental externalizada* se deriva de la *acción material* con objetos, y tiene el mismo contenido objetivo que esta.

- e) El significado tiene sus raíces en la experiencia fenomenológica (acciones del sujeto y retroalimentación del ambiente, del que los manipulativos son un componente), pero su evolución se concreta socialmente a través de la interacción con el profesor.
- f) La acción sobre un objeto virtual tiene un carácter *concreto* si relaciona sistémicamente al objeto con otros en una estructura jerarquizada.
- g) La acción humana situada, social y significativa sobre un objeto, mediada por instrumentos culturales, posibilita un conocimiento *del* objeto, conocimiento integrado en una unidad a su objeto, y no un mero conocimiento de cadenas lingüísticas sobre él.
- h) Es posible comprender el desarrollo de las *funciones semióticas* (procesos psicológicos superiores) si se comprende su origen y las transiciones por las que pasan, es decir, si se hace un *análisis microgenético* de ese desarrollo.

### III. Metodología

#### III.1 Estrategia de investigación

Esta investigación está dirigida a *analizar, describir y explicar* cómo un estudiante pre-universitario abstrae las características esenciales, internaliza y usa un conjunto de signos simples y compuestos, así como sus relaciones o *funciones semióticas* que caracterizan al significado pragmático de objetos matemáticos que introducen a la Derivada, esto a través de la acción con manipulativos virtuales interactivos y de la interacción simultánea con un profesor. Las *funciones semióticas personales*, es decir,

aquellas detectadas en el sujeto después de la experiencia de *internalización*, tienen todas las características de las funciones psicológicas superiores, y en su estadio final, cuando son auto-reguladas y usadas consciente y voluntariamente por el sujeto, expresan el final del movimiento desde el plano inter-psicológico al intra-psicológico en lo que concierne al dominio del sujeto sobre los objetos matemáticos aludidos. Otra característica distintiva de las funciones psicológicas superiores, es que estas pueden desprenderse del contexto donde surgieron, y pueden ser re-contextualizadas y generalizadas.

El doble movimiento de la *contextualización*  $\rightarrow$  *des-contextualización*  $\rightarrow$  *re-contextualización* de las funciones psicológicas por un lado, y de *hetero-regulación*  $\rightarrow$  *auto-regulación* de la acción de los sujetos por el otro, así como el movimiento en todas las dimensiones del cambio consignadas en la *Tabla 2*, se concreta en esta tesis doctoral con la ejecución por el estudiante de varias tareas con las que se pretende lograr la formación paso-a-paso de *acciones mentales* acerca de las *funciones semióticas pretendidas* en el sujeto tal como la propone Piotr Galperin, en este caso en lo que concierne a un conjunto de objetos matemáticos y a sus relaciones. Para este fin, se estudia en particular la mediación de manipulativos virtuales y de la interacción con el profesor y sus efectos en el sujeto, mediación dirigida a establecer y a relacionar entre sí a los componentes del significado de una serie de objetos matemáticos que introducen a la Derivada. Los manipulativos virtuales diseñados y usados en esta tesis están dedicados a:

- Introducir o/y relacionar los objetos *función*, *variable dependiente* e *independiente* y sus representaciones semióticas, con otros objetos matemáticos;

- Relacionar el valor numérico de la *pendiente de la recta tangente* a una curva con las características de la forma de esta;
- Calcular la distancia entre dos puntos alineados vertical u horizontalmente en un plano coordenado, con vistas a su uso en el cálculo de la pendiente de segmentos rectos;
- Relacionar la pendiente del segmento recto entre dos puntos cualesquiera de un plano coordenado, con la *razón media de cambio* entre los puntos;
- Calcular la *razón media de cambio* entre dos puntos de una curva y relacionarla con la pendiente de la recta secante que pasa por esos puntos;
- Hacer una aproximación numérica y gráfica al cálculo de la *pendiente de la recta tangente* a una curva, e interpretarla como una *razón instantánea de cambio*; esto implica una aproximación visual e intuitiva al concepto de *límite*;
- Inducir una formulación algebraica del cálculo del punto anterior, que resulta ser la definición formal de Derivada.

A partir de estas tareas se investiga la generación de una red de *funciones semióticas* al nivel de *acciones mentales exteriorizadas* en el sujeto, quien interrelaciona y reorganiza verticalmente una estructura de más de 90 objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, algoritmos, argumentos, lenguajes de representación) conocidos y emergentes que constituyen una introducción al objeto matemático Derivada. La serie de objetos escogidos representa un corte arbitrario en la extensa red de relaciones de objetos que conforman a las matemáticas, aunque ese corte comprende a los objetos básicos culturalmente señalados como básicos en el Cálculo Diferencial (Edwards y Penney, 1987).

Se presenta a continuación un mapa de los manipulativos que consigna estos elementos, manipulativos encargados de la generación de las *funciones semióticas* pretendidas. Leído desde abajo hacia arriba, el mapa proporciona la ruta de las tareas a seguir, además de que muestra para cada manipulativo los requisitos necesarios para entenderlo. De esta forma, el *proceso* involucrado en un manipulativo se convierte en un *objeto* usado junto a otros *procesos* y *objetos* en los manipulativos siguientes, según la lógica de la *teoría de la reificación* presente en los estudios de Zandieh (2000).

Otra manera de interpretar la progresión temporal de la serie de manipulativos, mencionada brevemente arriba, es a través de la reorganización vertical ascendente de las estructuras disponibles y emergentes en el sujeto y el establecimiento de nuevas conexiones entre ellas, como lo proponen Schwarz, Dreyfus y Hershkowitz (2004). La reorganización vertical ascendente de objetos matemáticos simples como el *plano coordenado*, la *pendiente de una recta*, la *recta tangente* y la *secante*, o la *razón media de cambio* de una variable y los algoritmos asociados a ellos, que constituyen ciertamente otro objeto, da como resultado la posibilidad de desarrollar objetos o estructuras de objetos más complejos, como la *razón instantánea de cambio*, el *límite de un cociente* o la propia *Derivada*. Esto se logra a través de la acción con los manipulativos que muestran el *uso funcional* de esos objetos, lo que según Vygotsky construye su conceptualización en el sujeto a través de la relación jerarquizada establecida con el *uso funcional* de otros objetos.



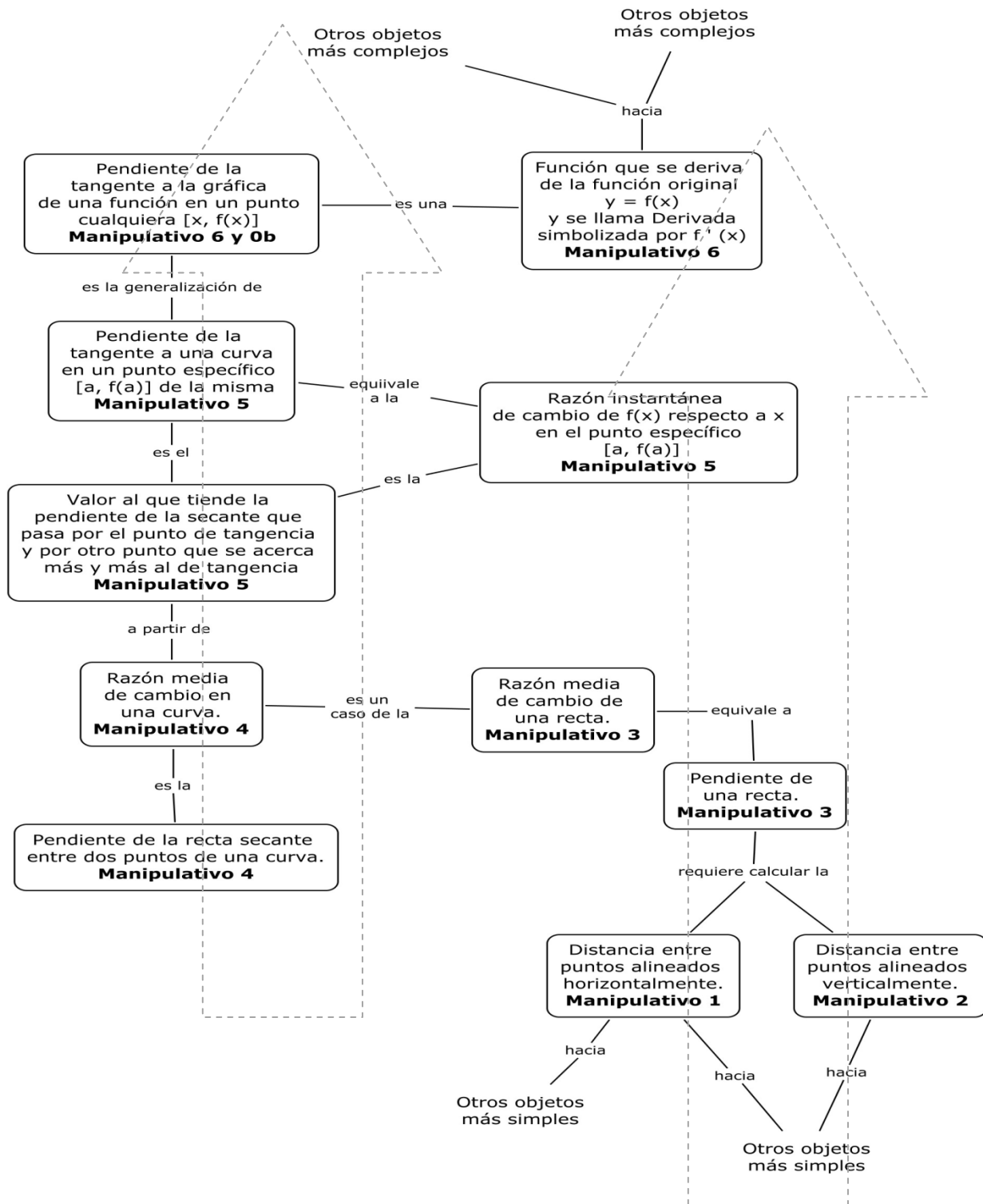


Figura 6. Mapa de manipulativos.

La progresión cronológica se mueve y se lee desde abajo hacia arriba.

En el apartado siguiente (llamado **Componentes del significado de los objetos matemáticos involucrados en cada tarea**), se presenta un listado exhaustivo de las *funciones semióticas pretendidas* en la experiencia de aprendizaje. Algunas características de las tareas que se plantean pueden rebasar las habilidades y conocimientos declarados de los sujetos, por lo que se pueden crear *zonas de desarrollo próximo* personalizadas.

Un proceso en algún manipulativo puede convertirse en un objeto en el siguiente, en la lógica que ha señalado Zandieh (2000).

Cada tarea comporta tres fases:

- i. Fase de *orientación* según el planteamiento de Galperin, pero que comporta en forma implícita un *pre-test*, según la propuesta de la *evaluación dinámica* (Seng, Hwee y Jensen, 2005; Haywood y Lidz, 2006), que es una evaluación de la *zona de desarrollo próximo* del sujeto. Esta tipo de evaluación se opone a la evaluación estática de los test estandarizados, y es enteramente consistente con la metodología de Galperin. Se logra con la acción con manipulativos virtuales acerca de aspectos de requisito de la tarea. Se explica en el párrafo siguiente.
- ii. Fase de *ejecución*, con *acción material* en el manipulativo virtual relativo a la tarea y con *acción verbal* comunicativa relacionada.
- iii. Fase de *control*, en la que hay acción a nivel *verbal interno* y a nivel *mental*, lo cual se traduce en un *post-test* según principios de *evaluación dinámica* expuestos a continuación.

Los principios de la *evaluación dinámica*, desprendidos del concepto de *zona de desarrollo próximo* en Vygotsky, son los siguientes (Seng, Hwee y Jensen, 2005; Haywood y Lidz, 2006):

- *El supuesto subyacente de la evaluación dinámica es que el aprendiz en cierto grado es capaz de aprender sobre la marcha de la evaluación (assessment), al contrario de la postura convencional de los test estandarizados, que consideran que la habilidad de aprender es inherentemente estable.*
- *El asesor interviene activamente en el curso de la evaluación del aprendiz con el objetivo de inducir cambios al nivel actual de su funcionamiento independiente.*
- *La evaluación se enfoca en el proceso de solución de problemas, e incluye aquello que promueve u obstruye el aprendizaje exitoso.*
- *La información de la evaluación es acerca de la respuesta del aprendiz a la intervención.*
- *La evaluación también provee información sobre cuáles intervenciones promueven cambios en el aprendiz, conectando evaluación con intervención o tipo de mediación.*
- *La evaluación es más a menudo administrada en un formato pre-test-intervención-post-test.*

Investigación sobre *evaluación dinámica* (en Kuo, Chang y Wang, 2002; Seng, Hwee y Jensen, 2005) ha demostrado que la determinación del nivel actual de funcionamiento independiente del aprendiz dado por los test estandarizados, está lejos de ser un buen indicador del nivel de desarrollo del individuo.

Mientras tiene lugar la actividad en las tres fases arriba mencionadas, se irá registrando con métodos *microgenéticos* y en forma continua el trabajo en la computadora y la interacción discursiva del binomio estudiante-profesor mientras el estudiante trata de responder a los requerimientos de la tarea. El trabajo en la computadora se grabará con la ayuda del software *Adobe Captivate*, que permite registrar en un video toda la actividad que se refleja en la pantalla, a la vez que graba sincrónicamente en audio la interacción verbal de los sujetos que están frente a la computadora.

La estrategia de investigación consiste, en resumen, en ejecutar un *estudio microgenético* situado en un *escenario de actividad* donde el sujeto internalizará *acciones materiales* relativas a la relación entre objetos matemáticos a través de manipulativos virtuales que conllevan una carga cultural, hasta convertirlas en *acciones verbales* y finalmente *mentales* sobre esos objetos, cosa que se registrará con la ayuda de un software específico para el caso y con pruebas escritas en papel en las que se externaliza la acción mental (ejecutada sin la presencia de los objetos ni del lenguaje verbal). En el escenario convergen los elementos siguientes:

- los sujetos: un estudiante y un profesor-investigador;
- los artefactos: computadora con manipulativos, calculadora, cuaderno;
- el contexto físico y cultural de la actividad;
- los conocimientos y habilidades previos del sujeto;
- las tareas pre-diseñadas y las preguntas del profesor;
- la interacción discursiva del estudiante y el profesor;
- las dimensiones del cambio que caracterizan al proceso;

- el producto de la acción, que son las manifestaciones cognoscitivas orales y escritas donde se reflejan las *funciones semióticas personales*.

El resultado del proceso, es decir, el significado personal de los objetos matemáticos tratados expresado como la red de signos simples y compuestos o *funciones semióticas* creadas y desarrolladas finalmente por el sujeto en la actividad, se registra en una matriz que permite incorporar además todas las dimensiones del cambio que interesa observar para poder analizar microgenéticamente la experiencia de *internalización* de esos objetos y de sus relaciones.

### III.2 Componentes del significado *pretendido* de los objetos matemáticos involucrados en cada tarea

A continuación, en las *Tablas 4 a 10*, se presentarán los componentes del *significado pretendido* de los objetos matemáticos que se pretende *internalizar* en el sujeto gracias a la acción con los manipulativos. Las *funciones semióticas* serían las relaciones expresión-contenido simples y compuestas que se establecen entre los componentes. Las proposiciones y los argumentos hacen uso de conceptos y lenguajes, mientras que los algoritmos se fundamentan en los argumentos.

Propósito de la <b>Tarea 0a</b> : Formular una definición para cada uno de los conceptos involucrados, y establecer proposiciones y argumentos utilizando lenguajes de representación diferentes. La situación problemática involucra algoritmos fundamentados en los puntos anteriores.				
<b>Artefacto: Manipulativo 0a</b>				
<b>Conceptos y definiciones</b>	<b>Proposiciones o propiedades</b>	<b>Algoritmos o procedimientos</b> (acciones y operaciones matemáticas en	<b>Lenguajes de representación</b>	<b>Argumentos de validación</b>

		Godino, no en el sentido de Leontiev)		
Concepto de Función	Proposición: El valor de la variable dependiente $f(x)$ depende del valor de la variable independiente $x$	Algoritmo: Calcular el valor de $f(x)$ sustituyendo un valor de $x$ en la expresión de la función	Lenguaje: Función como una gráfica	Argumento: Si a un valor de $x$ le corresponde siempre sólo un valor de $f(x)$ , entonces las funciones expresan una correspondencia uno-a-uno entre esas dos variables.
Concepto de Variable independiente	Proposición: A cada punto de la gráfica le corresponde un par $[x, f(x)]$	Algoritmo: Establecer pares ordenados $[x, f(x)]$	Lenguaje: Representación de puntos de la gráfica en un plano coordenado	
Concepto de Variable dependiente	Proposición: La gráfica de una función es la representación en un plano coordenado del conjunto de pares $[x, f(x)]$	Algoritmo: Ubicar puntos $[x, f(x)]$ en el plano coordenado	Función como una “máquina” que para el valor de una variable arroja otro valor asociado	
Concepto de Plano coordenado	Proposición: Una función se puede expresar con una tabla de pares de números, con una gráfica, con una ecuación y con palabras.	Algoritmo: Trazar la gráfica de $f(x)$ uniendo los puntos	Lenguaje: Notación $f(x)$ para una función (variable dependiente) y $x$ para la variable independiente	
Concepto de Coordenadas de un punto		Describir en lenguaje natural, numérico y algebraico la forma de la gráfica en puntos e intervalos interesantes	Lenguaje: Función como un conjunto de pares ordenados de números	
Concepto de Gráfica de una función			Lenguaje: Función como ecuación	
			Lenguaje: Descripción verbal de lo que es la gráfica de una función	

**Tabla 4.** Componentes del significado en la Tarea 0a

<p>Propósito de la <b>Tarea 0b</b>: Relacionar el signo y el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función con las características de la forma de esta</p>				
<p><b>Artefacto: Manipulativo 0b</b></p>				
Conceptos y definiciones	Proposiciones o propiedades	Algoritmos o procedimientos	Lenguajes de representación	Argumentos de validación
<p>Los del manipulativo anterior</p>	<p>Proposición: La pendiente de la recta tangente en un punto de tangencia equivale a la pendiente de la curva en ese punto.</p>	<p>Observar el signo y valor de la pendiente de la tangente y relacionarlo con el comportamiento de la recta y de la curva</p>	<p>Lenguaje: Gráfica cartesiana donde se represente la curva y la recta tangente</p>	<p>Argumento: Si el número en el cuadro mide la pendiente de la recta tangente, y la tangente describe el comportamiento de la curva, entonces el número describe el comportamiento de la curva.</p>
<p>Concepto: Recta tangente a una curva</p>	<p>Proposición: La pendiente describe el comportamiento de la recta tangente y de la gráfica.</p>		<p>Lenguaje: Valor numérico de la pendiente</p>	<p>Argumento: La pendiente nula indica que la gráfica está estacionaria, no crece ni decrece, por lo tanto es posible que haya un punto máximo o mínimo local, o ninguno de los dos.</p>
<p>Concepto: Pendiente de una recta</p>	<p>Proposición: En los puntos máximos y mínimos de la gráfica la pendiente de la tangente vale 0.</p>		<p>Lenguaje natural para describir el comportamiento de la gráfica</p>	<p>Argumento: Si a la izquierda de un punto de la curva hay pendientes negativas y a la derecha del punto pendientes positivas, entonces ese punto es un mínimo local</p>
<p>Concepto: Pendiente de una curva en un punto</p>	<p>Proposición: La pendiente negativa indica que la gráfica está bajando</p>			<p>Argumento: Si a la izquierda de un punto de la curva hay pendientes positivas y a la derecha del punto pendientes negativas, entonces ese punto es un máximo local</p>
<p>Concepto: Máximo o mínimo local</p>	<p>Proposición: La pendiente positiva indica que la gráfica está subiendo</p>			

**Tabla 5.** Componentes del significado en la Tarea 0b

Propósito de la <b>Tarea 1</b> : Establecer una fórmula que calcule la distancia entre dos puntos alineados horizontalmente en un plano coordenado.				
<b>Artefacto: Manipulativo 1</b>				
Conceptos y definiciones	Proposiciones o propiedades	Algoritmos o procedimientos	Lenguajes de representación	Argumentos de validación
Los del manipulativo anterior	Proposición: La diferencia entre la abscisa mayor y la abscisa menor calcula la distancia entre puntos alineados horizontalmente.	Proponer y probar una fórmula que calcule la distancia entre los puntos	Lenguaje Gráfico: ubicación de las coordenadas de puntos en un plano coordenado.	Argumento: En todos los casos mostrados en el manipulativo, sin importar los cuadrantes donde estén los puntos, la diferencia entre las abscisas mayor y menor calcula la distancia pedida.
Concepto Coordenadas	Proposición: La distancia siempre es positiva		Lenguaje: Fórmula simbólica de la distancia	
Concepto Distancia entre puntos en un plano coordenado			Lenguaje: Descripción del proceso en lenguaje natural	
			Lenguaje: Cálculo numérico de la distancia	

**Tabla 6.** Componentes del significado en la Tarea 1

Propósito de la <b>Tarea 2</b> : Establecer una fórmula que calcule la distancia entre dos puntos alineados verticalmente en un plano coordenado.				
<b>Artefacto: Manipulativo 2</b>				
Conceptos y definiciones	Proposiciones o propiedades	Algoritmos o procedimientos	Lenguajes de representación	Argumentos de validación
Los del manipulativo anterior	Proposición: La diferencia entre la ordenada mayor y la ordenada menor calcula la distancia entre puntos alineados verticalmente.	Proponer y probar una fórmula que calcule la distancia entre los puntos	Lenguaje Gráfico: ubicación de las coordenadas de puntos en un plano coordenado.	Argumento: En todos los casos mostrados en el manipulativo, sin importar los cuadrantes donde estén los puntos, la diferencia entre las ordenadas mayor y menor calcula la distancia pedida.
Concepto Coordenadas	Proposición: La distancia siempre es		Lenguaje: Fórmula	



	positiva		simbólica de la distancia	
Concepto Distancia entre puntos en un plano coordenado			Lenguaje: Descripción del proceso en lenguaje natural	
			Lenguaje: Cálculo numérico de la distancia	

**Tabla 7.** Componentes del significado en la Tarea 2

<p>Propósito de la <b>Tarea 3</b>: calcular la pendiente <math>m</math> de un segmento recto entre dos puntos de un plano coordenado. Relacionar la pendiente <math>m</math> con la razón media de cambio del desplazamiento vertical respecto a una unidad del horizontal.</p>				
<p><b>Artefacto: Manipulativo 3</b></p>				
Conceptos y definiciones	Proposiciones o propiedades	Algoritmos o procedimientos	Lenguajes de representación	Argumentos de validación
Los anteriores	Proposición: La pendiente de un segmento recto lo da el cociente $\Delta y / \Delta x$ .	Algoritmo: Calcular los desplazamientos horizontal y vertical de un punto respecto a otro en un plano coordenado.	Lenguaje: El símbolo $\Delta x$ para el desplazamiento horizontal de un punto respecto a otro.	
Concepto Pendiente de un segmento recto	Proposición: La pendiente mide el grado y la dirección de la inclinación del segmento recto.	Algoritmo: Calcular el cociente de desplazamientos $\Delta y / \Delta x$	Lenguaje: El símbolo $\Delta y$ para el desplazamiento vertical de un punto respecto a otro.	Argumento: Al ser $\Delta y$ y $\Delta x$ distancias dirigidas (tienen signo), la pendiente también tiene signo.
Concepto Razón media de cambio en un segmento recto	Proposición: $\Delta y$ y $\Delta x$ son distancias dirigidas, o sea, tienen signo.	Algoritmo: Calcular la razón de cambio a partir del cociente de desplazamientos	Lenguaje: El símbolo $m$ para la pendiente	
			Lenguaje: El cociente numérico de los desplazamientos vertical y horizontal	

			Lenguaje: La fórmula simbólica que calcula la pendiente o razón media de cambio en función de $\Delta y$ y $\Delta x$	
			Lenguaje: La definición verbal de pendiente y de razón de cambio	

**Tabla 8.** Componentes del significado en la Tarea 3

<p>Propósito de la <b>Tarea 4</b>: calcular la razón media de cambio entre dos puntos de una curva, e interpretar esta razón como la pendiente de una recta secante que pasa por los dos puntos.</p>				
<p><b>Artefacto: Manipulativo 4</b></p>				
Conceptos y definiciones	Proposiciones o propiedades	Algoritmos o procedimientos	Lenguajes de representación	Argumentos de validación
Los del manipulativo anterior	Proposición: La razón media de cambio entre los puntos es la pendiente de la recta secante que pasa por ellos	Algoritmo: Calcular los desplazamientos horizontal y vertical entre dos puntos de la gráfica de la curva.	Lenguaje: Gráfica de la curva	Argumento: De acuerdo a todos los casos mostrados en el manipulativo, el valor numérico de la secante coincide con el de la razón de cambio
Concepto Recta secante	Proposición: La razón media de cambio se expresa como la relación del número de unidades de desplazamiento de $f(x)$ respecto a un desplazamiento 1 en $x$ .	Algoritmo: Calcular el cociente de desplazamientos $\Delta y / \Delta x$	Lenguaje: Símbolo para la pendiente de la secante $m_{sec}$	
		Algoritmo: Calcular la razón media de cambio a partir del cociente de desplazamientos	Lenguaje: Definición verbal de la razón media de cambio entre dos puntos de una curva	
		Interpretar la razón media de cambio como la	Lenguaje: Cociente numérico de las	

		pendiente de la secante que pasa por los puntos	diferencias vertical y horizontal entre los puntos de la gráfica	
--	--	---	--	--

**Tabla 9.** Componentes del significado en la Tarea 4

<p>Propósito de la <b>Tarea 5</b>: Calcular la pendiente de la recta tangente <math>m_{tan}</math> a una curva en un punto dado. Interpretarla como la razón instantánea de cambio de <math>f(x)</math> respecto a <math>x</math> en ese punto. Establecer una fórmula simbólica general para calcular <math>m_{tan}</math> en cualquier punto genérico <math>[x, f(x)]</math>.</p>				
<p><b>Artefacto: Manipulativo 5</b></p>				
Conceptos y definiciones	Proposiciones o propiedades	Algoritmos o procedimientos	Lenguajes de representación	Argumentos de validación
Todos los anteriores	Proposición: La pendiente de la tangente no puede calcularse con la fórmula convencional pues no se conoce más que un solo punto de los dos que exige la fórmula.	Algoritmo: Calcular la pendiente de la recta secante que pasa por el punto de tangencia y por otro punto móvil cercano	Lenguaje Gráfico: recta tangente, recta secante, curva	Argumento: Mientras la recta secante se aproxima a la recta tangente, la pendiente de la secante se aproxima a la pendiente de la tangente.
Concepto Razón instantánea de cambio	Proposición: La recta tangente puede ser vista como una secante en la que los puntos de corte de la gráfica están infinitamente cercanos.	Algoritmo: Aproximar la recta secante a la recta tangente	Lenguaje Numérico: valor de la pendiente de la secante. Valor de tendencia de la pendiente de la secante al acercar un punto al de tangencia.	Argumento: La pendiente de la tangente es el valor al que tiende la pendiente de la secante al acercarse más y más el punto móvil cercano al punto de tangencia.
Concepto Límite de una secuencia	Proposición: La pendiente de la tangente en un punto es la pendiente de la curva en ese punto	Observar la tendencia del valor de la pendiente de la secante e identificar esta tendencia con la pendiente de la tangente	Lenguaje Natural: descripción verbal de la estrategia para calcular $m_{tan}$	
Concepto Límite de un cociente de desplazamientos	Proposición: La pendiente de la tangente representa la razón instantánea		Lenguaje Algebraico: símbolos para las coordenadas	

	de cambio de la función $f(x)$ respecto a $x$		$[x, f(x)]$ y $[x+\Delta x, f(x+\Delta x)]$ . Fórmula para hallar $m_{\tan}$ para cualquier punto $[x, f(x)]$ .	
	Proposición: La pendiente de la tangente expresa cómo está cambiando la función en el punto de tangencia.			

**Tabla 10.** Componentes del significado en la Tarea 5

### III.3 Criterios para el diseño de las tareas

El diseño de las tareas que constituyen la secuencia de la experiencia a estudiar está dirigido por el objetivo de investigación de esta tesis. En los apartados de *marco teórico* y de *metodología* se ha mencionado que las *funciones semióticas* que pretenden ser el resultado final de la actividad de *internalización* de los sujetos, son de hecho funciones psicológicas superiores que se caracterizan entre otras cosas, por ser el producto de un movimiento del sujeto desde acciones contextualizadas y luego descontextualizadas, hasta llegar a las *acciones mentales* que estén listas para ser re-contextualizadas en nuevos casos. Es decir, que se trata de funciones mentales generalizadas, libres ya de la determinación del contexto de donde originalmente brotaron.

Se ha dicho también que este movimiento hacia la generalización se logra en la transición de *acciones materiales*, a *verbales* y a *mentales* relativas a los objetos matemáticos involucrados, como lo puntualiza la propuesta teórica de Galperin. Por esta

razón se ha tomado esta secuencia como el modelo para las tareas. Las tareas de la secuencia de actividades buscan generar la *internalización* y la *mediación semiótica* logradas a través del concurso y articulación de dos tipos de movimiento: la acción del estudiante con manipulativos virtuales en la computadora y la interacción discursiva entre el estudiante y el profesor.

Los criterios más generales para el diseño de las tareas se encuentran sintetizados en los *Supuestos* establecidos en la sección correspondiente.

Desde el punto de visto organizativo, cada tarea implica:

- un propósito general que alude al rol de la tarea respecto al objetivo global;
- un propósito particular, que es la generación de las *funciones semióticas* pretendidas;
- una secuenciación de acciones y de preguntas, que implica un *pretest*, una *intervención* y un *postest*;
- el uso de artefactos de mediación (los manipulativos virtuales),

Los signos y los artefactos implicados en tales tareas (representaciones semióticas de objetos matemáticos, manipulativos y computadora) son productos del desarrollo histórico-cultural-social humano, y por eso conllevan formas culturales de producción de saberes que actúan no sólo en el mundo externo sino que pueden hacerlo más tarde en el plano cognitivo del sujeto (Falcade, 2006). Los signos son medios sociales de objetivación que incorporan elementos del saber a enseñar, y por tanto son susceptibles de funcionar como instrumentos de *mediación semiótica*. Gracias a su *uso funcional* en los manipulativos pueden participar activamente en la formación de conceptos. El tipo de tareas debe

favorecer también procesos de *internalización* de las acciones en la computadora, para transformarlas en un instrumento de *mediación semiótica*. Además, las acciones con la computadora deben articularse con los intercambios discursivos para generar significados personales que apunten hacia los institucionales.

La acción con los manipulativos, que conlleva una acción semiótica, intenta la *saturación en concreto* de los objetos matemáticos, para evitar el riesgo del verbalismo desprovisto de significado del que habla Vygotsky.

Las *acciones a nivel material* sobre el manipulativo permitirán tomar consciencia y abstraer las propiedades del objeto matemático ahí representado, además de ir construyendo una red de conceptos espontáneos sobre los que cimentar los científicos. Lo que se busca con la acción en el escenario de actividad, es situarse en una zona de confluencia de ambos tipos de conceptos.

Por su parte, las *acciones a nivel verbal* orales y escritas ponen el acento en la toma de consciencia que caracteriza a este tipo de actividad semiótica, pues se implica la necesidad de una organización precisa de la actividad al pasar del nivel de acciones espontáneas e inconscientes al nivel consciente. Las acciones verbales intentarán profundizar en las relaciones causa-efecto, lo que requiere pruebas, demostraciones y argumentos de validación.

Las *acciones a nivel mental* apuntan a desligar los significados del objeto matemático del contexto de los manipulativos, para ser susceptibles de re-contextualizarse en nuevos problemas y casos al alcanzar el rango de conocimientos generales, saberes o significados institucionales.

Una vez diseñadas las tareas en función de su propósito de movilizar los artefactos para que el sujeto genere los signos que caracterizan al significado pragmático de los objetos matemáticos, el rol del profesor es crítico y fundamental en varios sentidos (Falcade, 2006), pues él organiza la secuencia de las tareas y el proceso de *mediación semiótica* o emergencia de esos signos y su evolución, tratando de garantizar el tránsito desde las posturas personales a las institucionales con la ayuda de las actividades con el artefacto.

Estas tareas deben construir e *internalizar* la red de *funciones semióticas* objetivo.

### III.4 Las tareas planteadas

A continuación se presenta la *Tabla 11* que muestra las tareas secuenciadas, y se incluye el propósito de cada una, los conocimientos de requisito previamente evaluados en un pretest, y las preguntas que hace el profesor a lo largo de la acción del estudiante con el manipulativo. Los pretest de todas las tareas se juntaron en una sola prueba previa. Más adelante en este mismo apartado, la *Tabla 12* presentará los postest que dan cuenta de las acciones mentales externalizadas generadas por el estudiante en la actividad.

Manipulativo	Propósito	Pretest al estudiante	Preguntas del profesor durante la acción del estudiante con el manipulativo
<b>Tarea 0a / Manipulativo 0a</b>	Establecer las definiciones de <i>función, variable dependiente, variable independiente, gráfica de una función</i> / Establecer la notación $f(x)$ para una	Ubicar puntos en el plano coordenado. Trazar la gráfica de una ecuación calculando y ubicando puntos de	¿Cómo se calcula cada punto de la gráfica de la función? ¿Cómo se traza la gráfica de una función? ¿Qué relación hay entre $x$ y $f(x)$ ? ¿Qué es una función? ¿Cómo puede definirse lo que es la gráfica de una

	<p>función. Encontrar puntos específicos <math>[ a, f(a) ]</math> de la gráfica dada una función.                  Trazar la gráfica de una función a partir de encontrar y dibujar puntos de la misma.                  / Establecer la relación entre el lenguaje natural, gráfico, numérico y algebraico de una función / Describir el comportamiento de la gráfica de una función en términos numéricos, algebraicos y gráficos.</p>	<p>la gráfica.                  Concepto de función. Notación <math>f(x)</math> para funciones.</p>	<p>función? En el manipulativo ¿en cuáles formas se está expresando la función? ¿Cuál es el valor de <math>f(1)</math>, <math>f(-1)</math>, <math>f(0)</math>? ¿En la gráfica cuáles valores de <math>x</math> hacen que <math>f(x) = 0</math>? ¿Cómo podrían calcularse algebraicamente los puntos donde <math>f(x) = 0</math>? En la gráfica ¿aproximadamente en cuáles intervalos de valores de <math>x</math> la función <math>f(x) =</math> es positiva? ¿Para cuáles intervalos de valores de <math>x</math> la función <math>f(x) =</math> es negativa? ¿Aproximadamente en cuál intervalo de valores de <math>x</math> la gráfica de la función es creciente y en cuál decreciente?</p>
<p><b>Tarea 0b / Manipulativo 0b</b></p>	<p>Describir la forma o el comportamiento de la gráfica de una función a través de la pendiente <math>m_{tan}</math> de la tangente a la curva. Trazar la gráfica aproximada de una función dados ciertos valores numéricos de <math>f(x)</math> y de <math>m_{tan}</math> en puntos interesantes.</p>	<p>Los anteriores.                  Recta tangente a una curva. Punto de tangencia.                  Trazar una recta tangente en un punto dado.</p>	<p>Describe lo que pasa con la recta tangente y la forma de la gráfica alrededor y en los puntos A, B y C, mientras observas el signo y valor de <math>m_{tan}</math>. ¿Qué relación encuentras entre el <b>valor y signo</b> de la pendiente de la recta tangente <math>m_{tan}</math> y el "comportamiento" de la recta y de la curva? Si en un punto de la gráfica <math>m_{tan}</math> vale 0, ¿cómo puedes saber si se trata de un punto máximo o uno mínimo?</p>
<p><b>Tarea 1 / Manipulativo 1</b></p>	<p>Establecer una fórmula que calcule la distancia entre los dos puntos alineados horizontalmente en un plano coordenado.</p>	<p>Los anteriores.                  Dadas las coordenadas de dos puntos alineados horizontalmente, calcular la distancia entre ellos (sin recurso gráfico).</p>	<p>Observando el funcionamiento del manipulativo, establece una fórmula que calcule la distancia entre los puntos alineados horizontalmente para que funcione en todos los casos.</p>
<p><b>Tarea 2 / Manipulativo 2</b></p>	<p>Establecer una fórmula que calcule la distancia entre los dos puntos alineados verticalmente en un plano coordenado.</p>	<p>Los anteriores.                  Dadas las coordenadas de dos puntos, calcular la distancia entre ellos (sin recurso gráfico).</p>	<p>Observando el funcionamiento del manipulativo, establece una fórmula que calcule la distancia entre los puntos alineados verticalmente para que funcione en todos los casos.</p>



<p><b>Tarea 3 / Manipulativo 3</b></p>	<p>Calcular la pendiente de un segmento recto determinado por dos puntos en un plano coordenado. Interpretar la pendiente como una razón media de cambio.</p>	<p>Los anteriores. Pendiente de un segmento recto. ¿Qué operación harías para saber cuántas veces es más grande 21.7 que 9.4 ?</p>	<p>¿Cómo sería una fórmula que calcule la pendiente del segmento determinado por las coordenadas de dos puntos? ¿Qué es lo que mide la pendiente? ¿Cómo se interpreta que algunos de los valores de la pendiente sean negativos? ¿Cómo definirías la pendiente? ¿Cómo definirías la razón media de cambio? ¿Qué relación hay entre la pendiente y la razón media de cambio?</p>
<p><b>Tarea 4 / Manipulativo 4</b></p>	<p>Hallar la razón media de cambio entre dos puntos de una curva. Relacionar la razón media de cambio con la pendiente de la recta secante que pasa por los dos puntos. Establecer o reforzar una definición co-variacional de función.</p>	<p>Los anteriores. Recta secante.</p>	<p>¿Cómo definirías a la razón media de cambio entre dos puntos de una curva? Si las coordenadas de los dos puntos fueran <math>[x, f(x)]</math> y <math>[x+\Delta x, f(x+\Delta x)]</math>, ¿con qué fórmula la calcularías? ¿qué mide la razón media de cambio en la curva?</p>
<p><b>Tarea 5 / Manipulativo 5</b></p>	<p>Calcular la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado. Describir la estrategia para efectuar dicho cálculo según el manipulativo. Interpretar dicha pendiente como la razón instantánea de cambio de la curva en ese punto. Interpretar la pendiente de la tangente en un punto de la curva como la pendiente de la curva en ese punto. Definir lo que es la razón instantánea de cambio de <math>f(x)</math> respecto a <math>x</math>. Establecer una fórmula simbólica general que encuentre una expresión para calcular <math>m_{\tan}</math> para cualquier punto <math>[x, f(x)]</math>.</p>	<p>Los anteriores.</p>	<p>¿Qué estrategia se sigue para hallar la pendiente de la recta tangente? ¿cómo definirías a la razón instantánea de cambio de <math>f(x)</math> respecto a <math>x</math> ?</p>

**Tabla 11.** Las tareas

Por otro lado, para registrar el producto de las tareas en el sujeto, se le aplican tres tipos de *postest* para cada una de ellas: **Postest 1** consiste en que el sujeto resuelva un problema y responda ciertas preguntas sobre los objetos y relaciones activadas por el manipulativo, aplicándose inmediatamente después de la acción del sujeto en la computadora, teniendo como recurso opcional de apoyo al propio manipulativo. **Postest 2** consiste en que el sujeto resuelva otro problema y responda otras preguntas sobre los objetos y relaciones activadas por el manipulativo, pero esta vez sin tener recurso a este, lo que da evidencia de *acción mental* que prescinde de la acción material y verbal. **Postest 3** se aplica al menos dos semanas después de la actividad con manipulativos y sin tener acceso a estos, para tener evidencia externalizada de *acciones mentales* residuales. Este último *postest* permite complementar la observación de características del cambio que no pueden estudiarse de otro modo, como son el *grado de abreviación*, *grado de atención*, *grado de entendimiento* y el *grado de flexibilidad* del desempeño del sujeto respecto a los *postest* 1 y 2.

Se presenta a continuación el contenido de los *postest* en la *Tabla 12*.

<b>Manipulativo</b>	<b>Postest 1:</b> inmediatamente posterior a la actividad; se puede recurrir al manipulativo	<b>Postest 2:</b> inmediatamente después de Postest 1; evidencia de acción mental, sin recurrir al manipulativo	<b>Postest 3:</b> al menos 2 semanas después, evidencia de acción mental sin recurrir al manipulativo
Para el <b>Manipulativo 0a</b>	<b>Postest 0a.1:</b> En la hoja <b>prueba 0a</b> responder las preguntas. <b>Postest 0a.2:</b> trazar la gráfica de la función $f(x) = 0.5x^2 + x - 7$ ; ¿aproximadamente para cuáles valores de $x$ la función $f(x) = 0$ ? ¿En qué intervalos $f(x)$ es creciente? ¿para cuál valor de $x$ la gráfica tiene un máximo/mínimo local?	Problema 2. Trazar la gráfica de la función $f(x) = 0.1x^3 - 0.1x^2 - 2x + 1$ ; ¿cuál es el valor de $f(1)$ ? ¿Cuál es el valor aproximado de $f(0)$ ? ¿aproximadamente para cuáles valores de $x$ la función $f(x) = 0$ ? ¿en qué intervalos $f(x)$ es creciente? ¿Qué es una función?	¿Qué es una función?
Para el <b>Manipulativo 0b</b>	<b>Problema 0a.1:</b> Traza en forma aproximada en un plano coordenado la gráfica de una función que tenga las características siguientes: $f(-1) < 0$ ; $m_{tan} < 0$ en $[-\infty, -1]$ ; $m_{tan} > 0$ para $(-1, 3)$ ; $f(3) > 0$ ; $m_{tan} = 0$ para $x = 3$ ; $m_{tan} = 0$ en $f(3)$ ; $m_{tan} < 0$ en el intervalo $[3, \infty]$ .		Traza en forma aproximada en un plano coordenado la gráfica de una función que tenga las características siguientes: $f(-3) > 0$ ; $m_{tan} > 0$ para $(-\infty, -3)$ ; $m_{tan} = 0$ para $x = -3$ ; $m_{tan} < 0$ para $(-3, 0)$ ; $m_{tan} = 0$ para $x = 0$ ; $m_{tan} > 0$ para el intervalo $(0, 2)$ ; $f(2) > 0$ ; $m_{tan} = 0$ en el intervalo $[2, \infty]$ .
Para el <b>Manipulativo 1</b>	Nada	Calcular mentalmente la distancia entre los puntos $(-2, 4)$ y $(5, 4)$	Calcular mentalmente la distancia entre los puntos $(-2, -2)$ y $(6, -2)$
Para el <b>Manipulativo 2</b>	Nada	Calcular mentalmente la distancia entre los puntos $(-2, 1)$ y $(-2, -4)$ . Calcular (en papel) la distancia entre las funciones $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$ en una vertical trazada en $x = 0.5$	Calcular mentalmente la distancia entre los puntos $(-2, -2)$ y $(-2, 5)$

<p>Para el <b>Manipulativo 3</b></p>	<p>Calcular mentalmente la razón de cambio de <math>y</math> respecto a <math>x</math> de un segmento de recta que pasa por los puntos <math>(-4, 7)</math> y <math>(4, -9)</math>.</p>	<p>Calcular mentalmente la razón de cambio de <math>y</math> respecto a <math>x</math> de un segmento de recta que pasa por los puntos <math>(-7, 8)</math> y <math>(-6, 5)</math>.</p>	<p>Nada (está implícito en las tareas 4 y 5)</p>
<p>Para el <b>Manipulativo 4</b></p>	<p>Nada</p>	<p><b>Problema 4.2:</b> (en papel) En la función <math>f(x) = 1 - x^2</math>, calcular a) la razón de cambio de <math>f(x)</math> respecto a <math>x</math> entre los puntos <math>(1, 0)</math> y <math>(0, 1)</math>. b) la razón de cambio de <math>f(x)</math> respecto a <math>x</math> entre los puntos <math>(-2, -3)</math> y <math>(1, 0)</math>.</p>	<p><b>Problema 4.3:</b> (en papel) Calcular la razón de cambio de <math>f(x)</math> entre <math>f(-2)</math> y <math>f(1)</math> si <math>f(x) = 1 - x^2</math>. <b>Problema 4.4:</b> En la tabla 11' (al final de esta) aparecen los valores de la variable independiente <math>x</math> y de la variable dependiente <math>g(x)</math>. a) ¿Cuál es la razón media de cambio de <math>g(x)</math> respecto a <math>x</math> en el intervalo <math>[0, 3]</math>. b) ¿Cuál es el valor medio de <math>g(x)</math> en el intervalo <math>[0, 3]</math>?</p>
<p>Para el <b>Manipulativo 5</b></p>	<p><b>Problema 5.1:</b> (en papel). a) Calcular numéricamente la pendiente de la tangente <math>m_{\tan}</math> a la gráfica de la función <math>f(x) = x^2 - 4</math> en los puntos <math>(2, 0)</math> y <math>(-1, -3)</math>. Usar una tabla como la del manipulativo. Problema 5.1a. Usando los símbolos para las coordenadas que aparece en el manipulativo ¿cómo sería una fórmula general que calcule <math>m_{\tan}</math> en cualquier punto genérico <math>[x, f(x)]</math>? Opcional: usando la fórmula, encontrar una expresión para <math>m_{\tan}</math> en una función dada, y manipularla para encontrar el valor numérico en un punto determinado. Compararla con la solución numérica. Manipular la fórmula para hallar los puntos en los que <math>f(x) = 0</math>.</p>	<p><b>Problema 5.2:</b> (en papel). a) Calcular numéricamente la pendiente de la tangente <math>m_{\tan}</math> a la gráfica de la función <math>f(x) = 1 - x^2</math> en el punto <math>(2, -3)</math>.</p>	<p><b>Problema 5.3:</b> (en papel). Calcular numéricamente la pendiente de la tangente <math>m_{\tan}</math> a la gráfica de la función <math>f(x) = 1 - x^2</math> en el punto <math>(2, -3)</math>.</p>

**Tabla 12.** Los postest

$x$	-1	-0.5	0	.5	1	1.5	2	3
$g(x)$	0	1.125	1	0.375	0	0.625	3	16

Tabla 12'. Datos del problema 4.3

[\(A la tabla de contenidos\)](#)

### III.5 Diseño de los manipulativos para promover el significado pretendido

Una vez establecidos los componentes del significado pretendido del objeto matemático meta, así como los criterios para diseñar las tareas encargadas de crearlo y las tareas mismas, se procederá a revisar el diseño de los manipulativos virtuales encargados de promover ese significado en los sujetos.

Comencemos retomando el concepto de manipulativo virtual. Los *manipulativos virtuales* usados en esta tesis constituyen una representación visual interactiva de elementos dinámicos que presentan una oportunidad para establecer conexiones entre los componentes del significado o funciones semióticas que caracterizan a un objeto matemático meta. Su propósito es ayudar a abstraer las características esenciales de esos objetos y de sus relaciones a través del descubrimiento y la investigación por parte del estudiante en el manipulativo y de la interacción discursiva simultánea con un profesor. Otro objetivo subyacente de los manipulativos es el de desarrollar pensamiento relacional en el estudiante, ya que cuentan con una combinación de elementos gráficos, verbales, numéricos y algebraicos que ayudan a la abstracción mencionada. Los manipulativos proveen un ambiente interactivo en el que el estudiante puede hacer conexiones entre conceptos, algoritmos y lenguajes de representación, permitiendo la generación y formulación de

proposiciones y de argumentos de validación relativos al objeto. Además ofrece retroalimentación inmediata de las acciones del sujeto, lo cual quiere promover la conceptualización de tales objetos.

Para esta tesis se han diseñado manipulativos virtuales en la hoja de cálculo Excel, que permite la representación simultánea de objetos matemáticos diversos, como pueden serlo la gráfica de una función, su expresión algebraica, los cálculos numéricos asociados a ella y otros elementos gráficos. La hoja de cálculo Excel, de acceso general, puede además incorporar objetos provenientes de otras aplicaciones informáticas como *Visual Basic*, que a través de elementos como barras de desplazamiento, casillas de verificación, menús desplegables y otros, potencian la interacción del usuario con la hoja de cálculo. En el caso de los manipulativos aquí utilizados, se ha aprovechado el poder de la barra de desplazamiento para que el estudiante pueda cambiar cuando lo desee el valor numérico de ciertos parámetros y con ello activar simultáneamente y en consecuencia las otras representaciones semióticas del mismo objeto, como gráficas y el valor numérico de otras cantidades. Cada vez que se activa la barra de desplazamiento cambia aleatoriamente el valor de un parámetro, lo que permite generar una gran cantidad de ejemplos en una sola hoja de cálculo de Excel, ejemplos sobre los cuales se pretende, como se ha dicho, que el estudiante pueda abstraer las características esenciales del objeto y en consecuencia conducir a una posible generalización y a un concepto. Los manipulativos retan al estudiante a desentrañar o explicar el funcionamiento matemático de objetos matemáticos específicos, tratando de transmitir la cultura matemática institucional a través de la observación del *uso funcional* de esos objetos, factor principal en el desarrollo de los conceptos según Vygotsky, así como la terminología disciplinar asociada. Al principio la

acción del estudiante con los manipulativos es a nivel material u objetual, y las preguntas del profesor hacen que el estudiante formule verbalmente su pensamiento y sus hallazgos, que corresponden al nivel verbal en Galperin. Finalmente, el estudiante debe demostrar que ha podido abstraer y generalizar las características esenciales de los objetos del manipulativo a través de una prueba o postest en papel en la que la acción sobre el objeto sucede a nivel mental o idealizado, es decir, sin acción material o verbal pero de todos modos externalizada en su ejecución al resolver el problema.

Cada manipulativo está enfocado específicamente en una serie predeterminada de objetos matemáticos y de funciones semióticas establecidas entre ellos, como las señaladas para cada una de las tareas en esta investigación, con la pretensión de la máxima economía posible de elementos. Están además cuidadosamente secuenciados para promover la reorganización vertical ascendente de los objetos matemáticos ya conocidos en manipulativos anteriores y los objetos emergentes del manipulativo presente.

La acción del sujeto con los manipulativos no es enteramente libre, sino que es encauzada o detonada por preguntas prediseñadas que focalizan la atención en la búsqueda de las relaciones meta específicas.

En el apartado titulado **Interpretación teórica de los datos** (en **Discusión**), se presenta el análisis de la tarea 4, que incluye una descripción de las características del correspondiente manipulativo 4 utilizado en ella, de sus elementos dinámicos y de las relaciones entre los objetos matemáticos presentes en él o funciones semióticas que el estudiante debe descubrir. Asimismo se analiza la presencia y significado de los 12 factores

de interactividad de Sedig y Hai-Ning (2006) para ese manipulativo en particular, si bien lo dicho para este manipulativo es válido para todos los demás.

### III.6 El sujeto y el contexto físico

Se investiga la actividad de internalización en un estudiante pre-universitario que ha terminado el primer año del bachillerato en una institución mexicana de educación privada y su edad es de 17 años. Durante ese año escolar ha cursado una asignatura de matemáticas que incluye temas como el trazado de gráficas de ecuaciones y funciones básicas como las funciones lineales, cuadráticas y exponenciales; estudió teoría de conjuntos y lógica expresada con notación de conjuntos. Al momento de la actividad conocía los conceptos de plano coordenado, coordenadas de puntos en el plano y pendiente de una recta, que son los objetos más básicos necesarios a la reorganización vertical de objetos en la experiencia investigada, aunque mostró confusión con el concepto de recta tangente y recta secante. Las evaluaciones obtenidas en ese ciclo escolar en matemáticas fueron crecientes, terminando con la máxima calificación. Temas como el planteo de modelos matemáticos de problemas de aplicación fueron estudiados en la Secundaria y no se preacticó en el 1er año de bachillerato. Es común que el abordaje de las matemáticas pre-universitarias enfatice aspectos algorítmicos y conceda menos importancia al aspecto conceptual y de resolución de problemas aplicados, por lo que el perfil de este estudiante lo sitúa en el contexto señalado por Bosch y Gascón (2003) relativo a la transición problemática entre la enseñanza pre-universitaria y la enseñanza universitaria de matemáticas a la que se asemeja más la experiencia de *internalización* aquí estudiada, transición caracterizada porque en la primera, los objetivos de aprendizaje y las prácticas educativas se enfocan en trozos puntuales de conocimiento, a diferencia de un enfoque universitario más ancho de miras en



objetivos y en prácticas, más cercanas a la resolución de problemas y a un mayor nivel de abstracción. Esta diferencia es un importante factor de dificultad en el desarrollo de la competencia matemática en estudiantes universitarios, dificultad de la que se pueden conocer algunos aspectos gracias a esta investigación. La actividad matemática a investigar sirve para introducir el tema de Derivada a través de sus conceptos subsidiarios (*función, razón media de cambio, razón instantánea, límite*).

El contexto físico de las sesiones no es una escuela, sino que está situado en el ambiente más relajado de una casa en la que el sujeto está exento de las presiones de la evaluación escolar. Sujeto e investigador están sentados a una mesa frente a una computadora Laptop, y sostienen un diálogo detonado por preguntas del profesor que tienen que ver con el contenido de los manipulativos que activa el estudiante. El investigador ha expresado al estudiante que la experiencia está encaminada a observar de qué manera un sujeto construye unos conceptos y a describir los obstáculos que para ello podría encontrar, y no tiene que ver con la calificación de la corrección o falsedad de esos conceptos, lo cual quiere liberar la tensión del sujeto acostumbrado a los exámenes escolares. La participación del estudiante es libre y voluntaria.

### **III.7 Instrumentos de recolección de datos**

En una investigación microgenética se pone la atención tanto en el *proceso* como en el *producto* de la experiencia estudiada. En esta tesis doctoral se investiga el *proceso* y el *producto* del fenómeno de *internalización* del significado de varios objetos matemáticos en un estudiante pre-universitario.

El principal instrumento de recolección de datos es el software *Adobe Captivate*, que posibilita tanto la captura de la actividad en la pantalla de la computadora como el registro simultáneo en audio del discurso de los participantes. Ambas actividades son detonadas por las tareas que implican la acción del sujeto con los manipulativos virtuales y la respuesta a las preguntas intencionadas hechas por el profesor en relación al contenido de los manipulativos. La transcripción escrita del discurso oral se hace en una base de datos que permite incorporar además a todas las dimensiones del cambio de la Tabla 2 observadas en el proceso, y también los productos, que son las *funciones semióticas personales*, todo lo cual constituye el insumo para el posterior análisis.

La base de datos incorpora asimismo todas las *funciones semióticas del significado institucional pretendido*, lo que permite hacer una comparación posterior con las *funciones semióticas personales* realmente movilizadas por el sujeto y ubicar aquellas funciones u objetos no movilizadas en absoluto. También se hace una valoración del grado de correspondencia entre los significados personal e institucional.

Otro instrumento de recolección de datos son las pruebas en papel en las que el sujeto resuelve problemas que involucran a las *funciones semióticas* generadas en los manipulativos y en la interacción con el profesor. Estas pruebas reflejan las *acciones mentales* adquiridas, lo que se traduce en que el sujeto no tiene acceso a la acción material con los manipulativos ni ejecuta una acción verbal. El nivel mental prescinde de los niveles anteriores pero es externalizado en las pruebas escritas.

### III.8 Cuestiones sobre la validez de esta investigación

La noción de *validez* está ligada a la investigación hecha desde un horizonte positivista. Desde la investigación cualitativa hay autores que abogan por ignorar esta noción, y otros que quieren re-significarla desligándola de la pretensión de objetividad y dándole criterios cualitativos que apuntan hacia una postura responsable de la investigación. Los criterios de validez más generales podrían ser los que enumera Sisto (2008) citando a autores como Lincoln y Guba, Potter y Weatherell y Gergen y Gergen, a saber: a) Cumplimiento de estándares de aceptabilidad por parte de la comunidad de investigadores (como la credibilidad cualitativa, la transferibilidad y la coherencia); b) Posicionamiento (reconocimiento de la propia posición en la labor de análisis e interpretación); c) La comunidad como árbitro de calidad (consideración de la voz de los participantes, no sólo los de la comunidad científica); d) Voz y multi-vocalidad (preocupación por la voz vívida, no distanciada de los sujetos, en particular las voces socialmente silenciadas); e) Reflexividad (ejercicio de una conciencia crítica respecto a la propia acción del investigador como sujeto realizador de la investigación).

Se examinarán en este apartado los criterios de validez que pueden ser invocados en esta investigación. Por un lado, la *credibilidad* de un estudio cualitativo pasa por responder a preguntas acerca de si se ha recogido, comprendido y transmitido en profundidad y amplitud los significados, vivencias y conceptos de los participantes. En el presente caso, el horizonte de significados del sujeto está circunscrito a un campo específico de cuestiones, que son las prácticas culturales discursivas y operativas acerca de los objetos matemáticos presentes en los manipulativos virtuales, y que por lo tanto son relativamente fáciles de detectar en el lenguaje y en la actividad. Estos significados, en su contraparte institucional,

están pre-determinados y sus expresiones en el sujeto (significados personales) son identificadas y clasificadas entre los elementos de la serie de funciones semióticas institucionales ya establecidas. Por esto mismo se facilita la comunicación del lenguaje y de los pensamientos del sujeto.

Las dimensiones del cambio usadas en la tesis para traducir el proceso de micro-desarrollo o microgenético, son evidentemente concomitantes, pues todas ellas apuntan a expresar las transiciones entre los comportamientos hetero y auto-controlados, entre los procesos inter e intra-psíquicos, y entre los ámbitos contextualizado y re-contextualizado o generalizado característicos del desarrollo que se quiere documentar. Las conexiones entre las dimensiones del cambio ayudan a crear un todo significativo coherente o concreto que aporta también a la *credibilidad* del estudio.

Pensamos que un factor sustancial de *credibilidad* en esta investigación es el hecho de contar con una descripción detallada y completa de la experiencia en el escenario de actividad gracias al registro de la actividad captada con el software *Adobe Captivate*, que al captar audio y video permite tener una referencia directa a los datos, con posibilidad de regresar a ellos una y otra vez para analizar dimensiones distintas en cada ocasión. La transparencia en el establecimiento de las categorías apriorísticas utilizadas tanto para el proceso (dimensiones del cambio) como para el producto (funciones semióticas) de la actividad investigada es otro factor importante, tanto como la transparencia en el procedimiento de codificación numérica de los grados de intensidad de las dimensiones del cambio consignada más adelante en el apartado de **Análisis**, en la Tabla 13. Por su lado, los supuestos de la investigación se establecen en referencia directa a las distintas secciones del marco teórico.

El registro de los datos se presenta en forma sistematizada en un formato de hoja de cálculo que permite la fácil anotación de la pertenencia de cada frase del sujeto en alguna de las categorías apriorísticas. Un ejemplo de este formato se presenta en la Tabla 14 en la parte de **Análisis**. El formato facilita una revisión de los datos por parte de otro investigador.

La *transferibilidad* del planteamiento de la investigación no se refiere a generalizar los resultados a una población más amplia sino que su esencia pueda aplicarse a otros contextos. Un caso único no puede generalizarse a otras situaciones, pero contribuye a un mayor conocimiento del fenómeno y a establecer pautas para futuros estudios semejantes. En cuanto a este tema pensamos que el escenario de actividad de la tesis es perfectamente trasladable a otros contextos, con sujetos de cualquier edad que tengan capacidad de hablar y de manipular en forma muy básica una computadora, y con cualquier tópico expresable con manipulativos virtuales. En última instancia la cuestión de la *transferibilidad* no la plantea el investigador sino el lector que se pregunta si puede aplicar el esquema de esta tesis a su propio contexto.

Por lo que toca a la *confirmabilidad* de los resultados de esta investigación, podemos decir que en buena parte depende de minimizar los sesgos y las tendencias particulares del investigador, cuestiones que tienden a paliarse con la profusión de categorías apriorísticas para la observación del escenario de actividad y con la consecuente transparencia de la lógica para interpretar los datos.

El apartado de **Interpretación teórica de los datos** es una discusión entre la teoría y los resultados de la investigación, y representa una interrogación reflexiva entre lo que la

literatura indica sobre las dimensiones del cambio y las funciones semióticas y lo que hemos encontrado en la realidad. Esto le da a la investigación un carácter de cuerpo integrado y un sentido de totalidad. Pensamos que esta triangulación de los datos con el marco teórico tiende también hacia la validación de la investigación.

#### IV. Análisis de los datos

##### IV.1 Estrategia del análisis

A partir del material de video y de audio captados con el software *Adobe Captivate*, se hace primeramente una transcripción de los intercambios discursivos orales entre el estudiante y el profesor. Enseguida la transcripción se vacía en una base de datos para que el investigador haga un juicio sobre el discurso para cada una de las dimensiones del cambio de la *Tabla 2*, buscando indicios tanto del *proceso*, a través de las transiciones microgenéticas o cambios evolutivos en cada uno de los rubros de la *Tabla 3*, como del *producto*, que son las *funciones semióticas personales* movilizadas por el aprendiz. Esto implica un análisis del discurso dirigido a observar categorías predeterminadas, por lo que se ejecuta un sistema de *observación categorial*, según la clasificación de Evertson y Green (1989), en el que se consideran unas *categorías apriorísticas* (Cisterna, 2005) o *conceptos objetivadores* (Elliot, 1990) para la observación, que orientan la construcción o selección de instrumentos de recolección de datos.

En los registros del *proceso* y del *producto* en la base de datos se busca posteriormente la existencia de patrones, de relaciones particulares, de ejes privilegiados de desarrollo de los signos involucrados en el significado, y del tipo y secuencia de

interacciones particulares. Para esto se observan la *trayectoria*, la *razón de cambio* y la *fuerza* de los cambios para todas las dimensiones del cambio de la *Tabla 2*, en relación a las *funciones semióticas personales* generadas.

Los resultados del análisis dan a conocer cómo es el proceso de *internalización* de las acciones materiales con los manipulativos virtuales, en los que están representados los signos, objetos o unidades culturales que son *internalizados* por los estudiantes. El conocimiento de este proceso proviene de la descripción densa de las transiciones microgenéticas en los rubros de la *Tabla 2* para cada tarea, a saber, en:

- *El grado de abstracción de la acción (material, verbal, mental)*
- *La función de la acción (de orientación, de ejecución o control)*
- *El grado de generalización o amplitud del discurso del estudiante*
- *El grado de explicitación u objetivación del discurso*
- *El grado de independencia de la acción del estudiante*
- *(Para el posttest 3) El grado de abreviación final de las operaciones*
- *(Para el posttest 3) El grado de atención o auto-regulación*
- *(Para el posttest 3) El grado de flexibilidad en las acciones emergentes*
- *(Para el posttest 3) El grado de entendimiento o insight*
- *(Para el discurso y el posttest 3) El grado de consciencia o despliegue*

Como se ha dicho, en cada una de ellas se analiza la *trayectoria*, la *razón de cambio*, el *grado de estabilidad* y la *fuerza* de los cambios.

En forma adicional, el análisis permite ganar conocimiento acerca de asuntos como:

- *La identificación de obstáculos típicos al aprendizaje y al desempeño*
- *Una estimación del esfuerzo requerido para superarlos*
- *El planteamiento de hipótesis acerca de los mecanismos exitosos de mediación del profesor en la superación de los obstáculos*
- *Una evaluación de las características de los manipulativos*
- *Identificación de las características particulares del manipulativo (instrumento específico de mediación semiótica) que logra u obstaculiza la generación de una función semiótica*
- *Identificación del proceso específico a través del cual se van relacionando los signos u objetos*
- *La identificación de los signos que fueron introducidos por el profesor*

Para facilitar el análisis de los intercambios discursivos entre el estudiante y el profesor, y poder expresar en forma gráfica la evolución temporal de todas las dimensiones de cambio, se ha asignado un código numérico a cada sub-dimensión de cambio que refleje la gradualidad en los criterios de cada una, tal como lo presenta la *Tabla 13* al final de este párrafo. Se incluyen asimismo en esta Tabla nuevas categorías y algunas sub-categorías adicionales surgidas de la necesidad y la experiencia del análisis en los casos en los que las dimensiones y sub-dimensiones originales de la *Tabla 2* no fueron suficientes para captar la experiencia investigada. Es el caso de la dimensión *grado de abstracción*, a la que se ha añadido las sub-dimensiones de *acción material-verbal*, y de *acción perceptual-verbal*,



explicadas en la misma *Tabla 13*. La dimensión *Grado de explicitación u objetivación*, que mide el grado de correspondencia entre los significados personal e institucional, es enteramente nueva. Una discusión detallada de esta toma de decisiones para adecuar el análisis, así como de la construcción de la base de datos, se presenta en el apartado siguiente.

<b>Dimensión del cambio a observar</b>	<b>Criterio</b>	<b>Observable</b>	<b>Código numérico</b>
<b>Grado de abstracción</b>	Acción material	El sujeto manipula físicamente un objeto (el manipulativo)	1
	Acción material-verbal	El sujeto habla mientras acciona el manipulativo	2
	Acción perceptual-verbal	El sujeto habla mientras imagina o visualiza el manipulativo	3
	Acción verbal	prescinde del manipulativo y emplea en su lugar el lenguaje comunicativo e interno	4
	Acción mental	El sujeto prescinde del manipulativo y del lenguaje oral	5
<b>Grado de generalización o amplitud</b>	Descripción perceptual	Usa referentes presentes en el manipulativo	1
	Descripción teórica	Usa referentes que no están visibles, y utiliza relaciones intralingüísticas entre signos que caracterizan el sistema del manipulativo	2
	Explicación perceptual	Establece explícitamente relaciones causales entre entidades y conceptos, comportando alguna forma de modelo o mecanismo del fenómeno observable en el manipulativo	3
	Explicación teórica	Establece explícitamente relaciones causales entre entidades y conceptos, comportando alguna forma de modelo o mecanismo hecho de relaciones entre signos	4
	Generalización perceptual	El sujeto se refiere a una propiedad general que se induce desde el manipulativo	5
	Generalización teórica	El sujeto se refiere a una propiedad general más allá del contexto del manipulativo, entre signos	6

<b>Grado de independencia</b>	Mediación de <i>orientación</i> del profesor	Se explican las instrucciones y se motiva al sujeto a seguirlas o intentarlas	1
		Se dan pistas al sujeto para que responda a las preguntas	2
	Mediación suave	Se recuerda al sujeto supervisar las respuestas para ayudarlo a tener un comportamiento auto-regulado	3
		Se da retroalimentación inmediata al sujeto para reforzar el comportamiento auto-regulado	4
	Mediación moderada	Se introducen estrategias útiles para que el sujeto seleccione estrategias y dé ejemplos	5
		Se deja al sujeto seleccionar la estrategia por sí mismo	6
	Mediación fuerte	Se demuestra la estrategia directamente	7
		Se ofrecen ejemplos y se asegura de que los sujetos usen con éxito la estrategia para resolver el problema	8
		Se intentan varias estrategias para ayudar al sujeto a encontrar la que se acomode a su estilo cognitivo	9
		Se detiene la mediación si el sujeto intenta varias aproximaciones pero no resuelve el problema	10
	Mediación de <i>control</i>	Se deja al sujeto reportar verbalmente el proceso de solución del problema	11
		Se deja al sujeto analizar la razón de las fallas en la solución	12
		Se deja al sujeto que diga la manera de modificar	13
		Se motiva al sujeto a explorar los problemas independientemente	14
<b>Grado de abreviación</b> ( <i>en postest 3</i> )	Observación de las operaciones efectuadas y automatizadas. Depende de la acción o el objeto.	Moviliza todas las operaciones originales requeridas por la acción	1
		Agrupar o fusionar algunas operaciones	2
		Agrupar o fusionar todas o casi todas las operaciones	3
<b>Grado de atención (auto-regulación)</b> ( <i>en postest 3</i> )	Observación. Separar los errores de falta de conocimiento previo con los de atención. Omisiones, descuidos en la escritura	Establece metas	1
		Emprende acciones hacia la meta	2
		Supervisa la adecuación de las conductas	3
		Evalúa sus acciones	4

<b>Grado de flexibilidad</b> ( <i>en posttest 3</i> )	Uso de diferentes aproximaciones a diferentes problemas para lograr una mayor eficiencia en la acción	Aplica la misma estrategia en todos los problemas	1
		Cambia de estrategia en los diferentes problemas para lograr una mayor eficiencia de la acción	2
<b>Grado de entendimiento (insight)</b> ( <i>en posttest 3</i> )	Grado en que las acciones están basadas en las propiedades relevantes y esenciales de la acción. Se manifiesta con el tipo de errores repetidos o no en la solución de un problema semejante	Repite los errores estructurales (no ejecutivos ni arbitrarios) al resolver un problema semejante	1
		Supera los errores estructurales (no ejecutivos ni arbitrarios) al resolver un problema semejante	2
<b>Grado de consciencia (despliegue)</b> ( <i>durante el discurso y en posttest 3</i> )	Grado en el que el sujeto es capaz de dar cuenta de sus acciones, principalmente en modo verbal	Completez, inteligibilidad y claridad de su expresión, nivel bajo	1
		Completez, inteligibilidad y claridad de su expresión, nivel medio	2
		Completez, inteligibilidad y claridad de su expresión, nivel alto	3
<b>Grado de explicitación</b>	No hay correspondencia	No hay correspondencia	1
	Ejemplificación	Representar una idea a través de un caso o ejemplo de ella.	2
	Interpretación	Establece explícitamente un lazo de equivalencia o correspondencia entre diferentes familias de signos. Se expresa como “ <i>esto corresponde a...</i> ” o “ <i>se parece a...</i> ”.	3
	Caracterización	Señala características salientes y definitorias de un objeto <i>proto</i> o <i>para-matemático</i> . Inclinaciones o tentativas hacia una <i>definición</i> .	4
	Definición	Explícita, precisa y delimita <u>intencionalmente</u> el significado <i>proto matemático</i> del objeto. Asigna una palabra a un objeto que era desconocido o poco conocido antes	5

**Tabla 13.** Dimensiones del cambio aumentadas y codificadas numéricamente

## **IV.2 Construcción de la base de datos y bitácora de decisiones tomadas sobre la marcha del análisis**

La base de datos en la que se registra el discurso para su análisis, se planteó como una matriz elaborada en la hoja de cálculo *Excel*, por su capacidad para registrar texto y para filtrar y ordenar información, además de poder transcribirla en forma de tabla en otras aplicaciones como *Word*. Además ofrece la posibilidad de tomar datos numéricos y elaborar distintas representaciones gráficas con ellos. En esta base de datos se tomaron como registros las intervenciones discursivas de los sujetos, estudiante y profesor, y como campos las dimensiones del cambio a observar consignadas en la Tabla 2.

Además de las columnas en que se transcribe el discurso, se dispusieron 4 columnas para registrar los componentes del significado para cada intervención del estudiante, lo que registra el *producto* de la actividad, y 7 columnas para registrar las dimensiones del cambio, lo que registra el *proceso* en la actividad. Cada frase del estudiante es catalogada en cada uno de esos 11 campos o columnas.

Se añadió después un campo adicional de observaciones, para registrar datos contextuales acerca de lo que hace el sujeto con el manipulativo mientras habla, dato que no puede captar el software *Adobe Captivate*. También se añadieron 4 columnas o campos adicionales dedicados a registrar el trabajo desarrollado por el estudiante en las pruebas en papel, así como también otro campo para registrar el *pretest* y los conocimientos movilizados en él. Se tienen en total 16 campos de la base de datos para registrar cada una de las intervenciones discursivas orales y escritas del estudiante y del profesor.

Al comenzar el análisis, surgió la necesidad de ampliar el número y tipo de categorías del *grado de abstracción* de la acción propuestas por Galperin (*material-verbal-mental*), con otras categorías intermedias que reflejaran la realidad de la experiencia estudiada. De esta forma surgieron las categorías de *acción material-verbal* y *acción perceptual-verbal*, que recogen la acción del sujeto cuando habla mientras acciona el manipulativo, y cuando habla mientras imagina o visualiza el manipulativo pero sin activarlo físicamente. De manera que las categorías del grado de abstracción de la acción quedan graduadas en el orden siguiente: *material*; *material-verbal*; *perceptual-verbal*; *verbal*; *mental*. Hay un apoyo teórico en cuanto a la introducción de la *acción perceptual* en van Erp y Heshusius (1986).

En la marcha del análisis se vio la dificultad para capturar individualmente la información en cada casilla, por eso se ha aprovechado la herramienta de la hoja de cálculo Excel *Validación de datos*, de manera que aparezca un menú de posibilidades de elección para cada columna en las celdas, y del menú escoger la opción correcta sin tener que capturarla, lo que representa una ventaja en el registro y una sistematización importante. Por otro lado esto temporalmente no deja lugar al registro de componentes imprevistos en el menú, aunque esto puede solucionarse quitando la herramienta *Validación de datos* una vez capturado el grueso de las intervenciones, y capturar manualmente los datos adicionales.

Durante el registro de la información en la base de datos quedó de manifiesto que la mediación del manipulativo siempre es del tipo *mediación fuerte 1* (el manipulativo presenta directamente una estrategia), por eso se eliminó la columna de mediación del manipulativo después de los primeros 15 registros en el formato.

Se hizo necesario igualmente añadir 3 campos adicionales para objetos del significado intervinientes, pues se puede aludir a más de un objeto en cada intervención del sujeto.

También surgió la necesidad de introducir unas categorías para el grado de correspondencia entre significados institucional y personal. A este efecto se tomaron unas categorías sobre el *grado de explicitación* u *objetivación* provenientes de la tesis doctoral de Falcade (2006), a saber: *ejemplificación, interpretación, caracterización y definición*, que son explicada en el apartado de *Dimensiones del proceso de cambio*.

Para efectos de facilitar y fragmentar el análisis, se hizo un cambio en cuanto a considerar las *funciones semióticas* en cada manipulativo por separado, pues aparecían originalmente todas juntas en un listado global.

En la categoría de *Grado de consciencia*, hay necesidad de hacer un juicio sobre la primera sub-categoría (*Completez e inteligibilidad de la expresión*), y sub-dividirla en 3 niveles: *bajo, medio* y *alto*, pues hay expresiones del sujeto que resultan confusas o lejanas de la formulación institucional que hacen necesaria esta graduación adicional. Más adelante se eliminaron las otras dos categorías de esta dimensión, *calidad del juicio del sujeto cuando compara la solución dada con la propia*, y *claridad del sujeto sobre el tipo de error que ha cometido*, pues no intervienen en la actividad.

Algunas categorías fueron subdivididas para dar mejor cuenta de la interacción de los sujetos, como en *Trayectoria* (se suma la sub-categoría *No muestra cambios cualitativos o cuantitativos*) y en *Grado de consciencia* (cada categoría tiene niveles *bajo, medio* y *alto*).

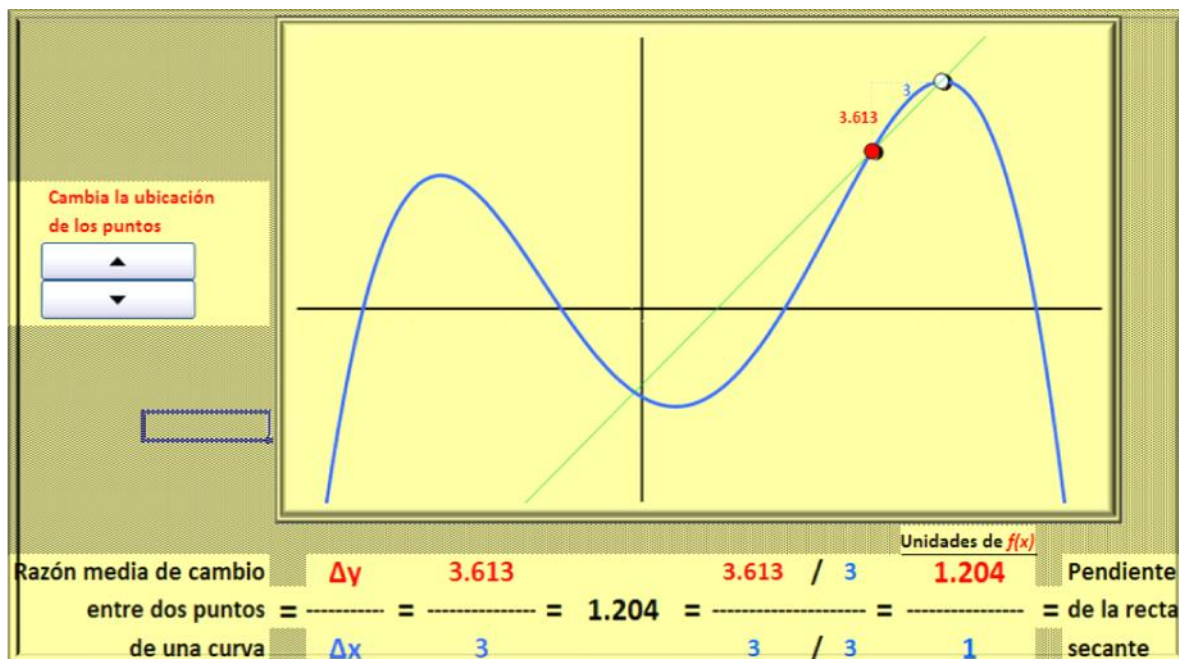
Para ordenar el análisis se hizo una tabla adicional donde se hicieron comentarios sobre cada dimensión del cambio por separado en cada manipulativo. Posteriormente se analiza esta tabla al momento de hacer la interpretación y redactar las conclusiones.

En el transcurso del análisis se hizo evidente que algunas de las dimensiones del cambio no eran de la misma categoría que el resto, sino que eran criterios de seguimiento de las otras dimensiones. Estos criterios de seguimiento o de evolución son: la *trayectoria*, la *razón de cambio*, la *variabilidad* y la *fuentes* de los cambios. Después se fusionaron los comentarios separados de *trayectoria*, *razón de cambio* y *fuentes* en una sola narración.

[\(A la tabla de contenidos\)](#)

**IV.3 El análisis y los resultados de la Tarea 4**

La Tarea 4, que conlleva un intercambio discursivo corto de ocho intervenciones del estudiante e igual número del profesor, tiene como propósito definir la *razón media de cambio* entre dos puntos de la gráfica de una función, extendiendo el concepto manejado en los manipulativos previos acerca de *razón de cambio* en un segmento recto. La tarea busca también relacionar esta *razón media de cambio* con la pendiente de la recta secante que pasa por los dos puntos, y finalmente establecer o reforzar una definición co-variacional de *función*. O sea, se busca una reorganización vertical de objetos en una nueva estructura. Para este efecto se utiliza el *Manipulativo 4* (Figura 9), en el que el estudiante activa la



**Figura 9.** El manipulativo 4

barra de desplazamiento en cualquiera de los dos sentidos, con lo que en cada ocasión que se cliqua sobre ella se mueven aleatoriamente los dos puntos sobre la curva y se traza la



recta secante que pasa por ellos, mientras cambian en forma correspondiente los datos en las fórmulas y el resultado de la operación matemática.

El profesor hace preguntas que focalizan la atención del estudiante en el propósito, a saber: *Por lo que se ve en el manipulativo, ¿cómo definirías a la razón media de cambio entre dos puntos de una curva? Si las coordenadas de los dos puntos fueran  $[x, f(x)]$  y  $[x+\Delta x, f(x+\Delta x)]$ , ¿con qué fórmula la calcularías? ¿qué es lo que mide la razón media de cambio en la curva?* Estas preguntas pre-definidas pueden cambiar un poco y de hecho cambiaron para adaptarse a las condiciones y a las respuestas que va dando el estudiante.

A continuación se muestra la *Tabla 14* donde aparece tanto el discurso suscitado por la Tarea relacionada al *Manipulativo 4*, como también la valoración de aquellas dimensiones de cambio con las que se analiza el discurso. Los *postest* se analizan con otras dimensiones adicionales. **P** representa al profesor y **E** al estudiante:

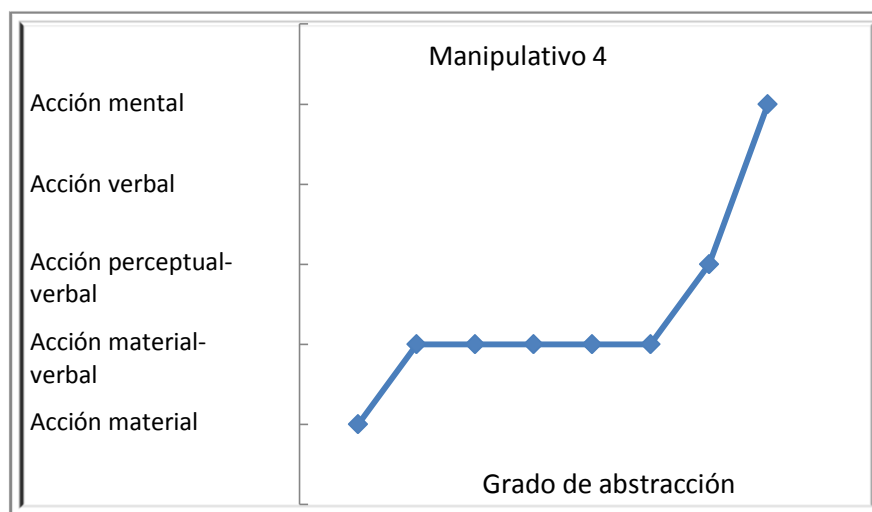
Sujeto	Discurso	Grado de abstracción	Grado de generalización	Grado de explicitación	Grado de mediación del profesor	Grado de consciencia o despliegue
P	<i>mueve este manipulativo a ver qué hay ahí</i>				Mediación nivel 1	
E	<i>.....esta es la razón media de cambio</i>	Acción material - 1. Después Acción material-verbal - 2	Explicación perceptual - 3	Ejemplificación - 2		Baja - 1
P	<i>ahora sería una curva.....entre dos puntos de una curva</i>				Mediación nivel 2	
E	<i>de un punto a.....otro punto.....trazas una línea entre esos dos y te da la pendiente</i>	Acción material-verbal - 2	Descripción teórica - 2	Interpretación - 3		Media - 2

P	<i>esa es la secante (P la señala directamente, pues en el pretest E no la identificó)</i>				Mediación nivel 7	
E	es la secante.....la pendiente de la secante es la..... razón media de cambio entre dos puntos.....ok, ahora, tomándolo como una ecuación, la fórmula sería delta y, sobre delta x, ¿para la razón media de cambio entre dos puntos? , no entiendo.....para sacar esto de aquí????	Acción material-verbal - 2	Descripción perceptual - 1	No hay correspondencia - 1		Baja - 1
P	<i>ve los valores, ve la fórmula</i>				Mediación nivel 1	
E	(duda)..... 4.603	Acción material-verbal - 2	Descripción perceptual - 1	No hay correspondencia - 1		Baja - 1
P	<i>ese qué es, ¿qué significa eso?</i>				Mediación nivel 2	
E	valor de y.....delta y.....y de aquí a acá cambia en 4.204, y de aquí a acá, 4.603.....aquí sería 6, en $x = 6$ .	Acción material-verbal - 2	Explicación perceptual - 3	Ejemplificación - 2		Baja - 1
P	<i>aquí está en términos de distancia. Ahora te voy a dar una curva, te voy a dar la ecuación de una curva y dos coordenadas de puntos. Tú vas a calcular la razón media de cambio entre dos puntos de la curva. Puedes regresar a ver este (manipulativo)..... .....si quieres apunta esta función, es <math>f(x) = 1 - x^2</math>, calcular la razón media de</i>				Mediación nivel 2	

	<i>cambio entre los puntos 1,0 y 0,1.</i>					
E	¿cómo son los puntos? ¿1,0 y 0,1?					Baja - 1
P	<i>te estoy dando las coordenadas de 2 puntos, pero .....ah ok, este.....(en este momento P se da cuenta que hay sobreinformación, que basta conocer las coordenadas de los dos puntos)</i>				Mediación nivel 1	
E	es como si me dieras la recta y hay que calcular la pendiente (E también se da cuenta de la sobreinformación)	Acción perceptual-verbal - 3	Generalización teórica - 6	Definición - 5		Alta - 3
P	<i>exactamente</i>					
E	(E resuelve el problema dado sin el apoyo del manipulativo ni del lenguaje verbal, y lo hace de forma correcta, expresando el resultado como una fracción de denominador 1, como corresponde a una razón de cambio)	Acción mental - 5	Generalización teórica - 6	Definición - 5		Alta - 3

**Tabla 14.** *El discurso en la Tarea 4 y las dimensiones para analizar el cambio*

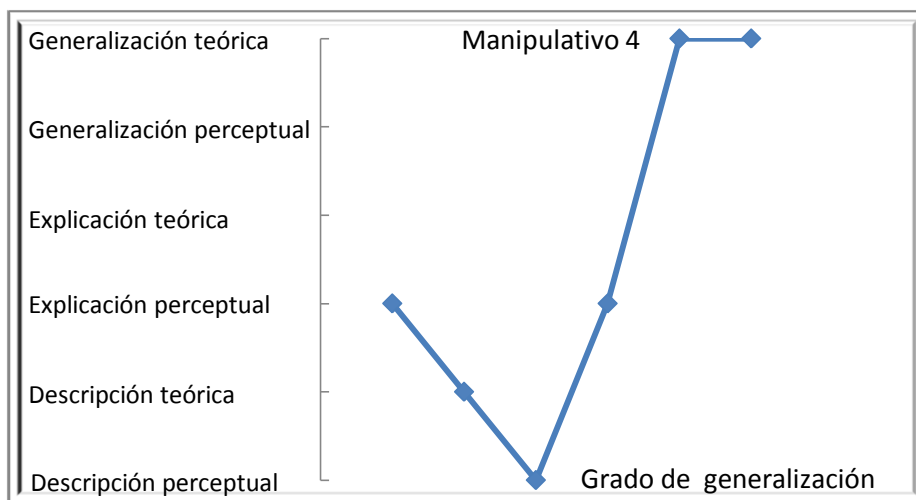
Al considerar solamente la información en cada columna relativa a las dimensiones de cambio, leída verticalmente, se tiene un registro de la evolución de cada una de ellas por separado. En la tabla de arriba aparecen las cinco dimensiones para analizar los cambios en el discurso. Con la información numérica acerca de cada dimensión se trazan gráficas que ilustran visualmente su trayectoria. Primeramente se presenta la gráfica para la evolución del *grado de abstracción* en la *Tarea 4*. El eje horizontal de estas gráficas es un eje



temporal, pero la distancia entre los puntos o nodos no representa intervalos iguales de tiempo, sino que son intervenciones discursivas de Erick. Tampoco se quieren representar todas y cada una de las intervenciones sino sólo aquellas que son significativas en la evolución del discurso. El eje vertical marca los niveles crecientes de la dimensión observada: Mientras más alto esté un punto, mayor es el nivel de la dimensión representada.

Vemos una breve *acción material* del estudiante con el manipulativo, y luego la acción se mantiene en *material-verbal* casi todo el tiempo, en la que el sujeto habla respondiendo las preguntas del profesor mientras acciona el manipulativo. En esta etapa él describe la situación presentada pero no la relaciona con el concepto de *razón de cambio*, hasta que descubre en el problema planteado que no necesita conocer la ecuación de la curva o la función, y que sólo con las coordenadas puede calcular la *razón de cambio*, momento en el que la acción es *perceptual-verbal*, es decir, que evoca o visualiza el manipulativo pero sin accionarlo físicamente. Finalmente el *postest* es resuelto en forma correcta a nivel de *acción mental exteriorizada*, esto es, que prescinde del manipulativo y del lenguaje oral comunicativo y la ejecuta en silencio sobre el papel.

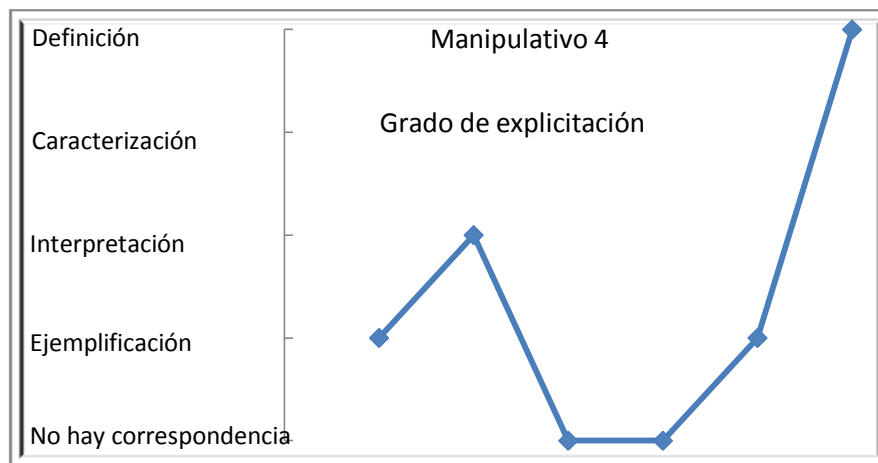
La evolución en el *grado de generalización*, que arranca con *descripciones perceptuales* y alcanza *generalizaciones teóricas*, se aprecia en la gráfica siguiente:



El sujeto comienza explicando perceptualmente la situación en forma correcta, "se traza una recta entre los 2 puntos y se calcula su pendiente", y haciendo una descripción teórica de la misma, pero no relaciona el concepto con el algoritmo que está en el manipulativo, lo confunde, lo que provoca que describa en forma perceptual la situación

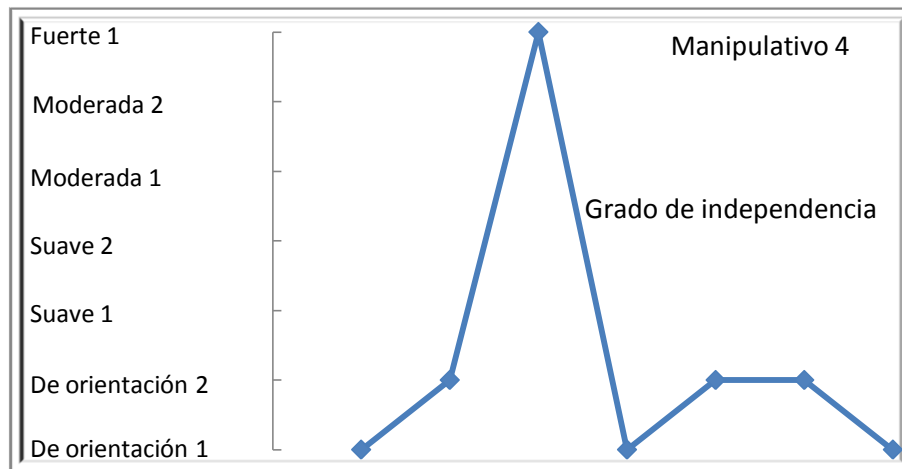
porque no entiende el concepto de *razón de cambio*. Pero cuando se pide al sujeto calcular numéricamente una *razón de cambio*, descubre que basta conocer dos puntos sin conocer la ecuación de la función, e inmediatamente hace una correcta *generalización teórica*, que mantiene en el postest.

El *grado de explicitación* del lenguaje del estudiante, que se mueve entre la ausencia de correspondencia del asunto tratado hasta la definición, se muestra a continuación:



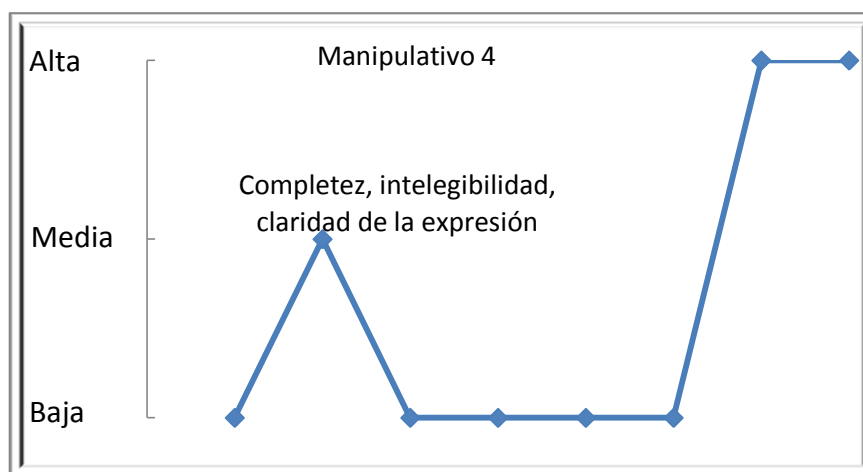
Comienza fluctuando entre nivel bajo y medio de claridad en la explicitación, hasta que se pierde al no relacionar la gráfica con el algoritmo para la razón de cambio que está en el manipulativo. A pesar de la *mediación fuerte* del profesor, el estudiante descubre correctamente que hay sobreinformación, inadvertida antes por el profesor, y sólo toma lo que necesita para responder las preguntas. Cuando sucede esto, el estudiante reacciona rápidamente y va directamente al nivel de *definición*.

En cuanto al *grado de independencia* del estudiante, hay que decir que está expresado en forma inversamente proporcional al grado en que interviene necesariamente el profesor para eliminar los obstáculos: a menor necesidad de mediación o de tutoría, mayor independencia del sujeto y viceversa.



El sujeto comienza su acción en forma independiente con la orientación del profesor que consiste en ofrecer instrucciones y pistas para la actividad, pero hay necesidad de que el profesor señale directamente la recta secante, pues el sujeto no la había identificado en el pretest general, lo cual constituye una breve *mediación fuerte*. Después de eso el sujeto regresa a ser relativamente independiente, necesitando sólo de orientación esporádica del profesor.

Finalmente se presenta la evolución en el *grado de consciencia* o *despliegue*, expresado a través de la completez, inteligibilidad y claridad de las expresiones verbales, orales y escritas del estudiante durante la tarea.



El estudiante comienza con un nivel de expresión de nivel bajo, duda, pues no entiende la intención ni las relaciones expresadas en el manipulativo. Con las preguntas-guía del profesor y su descubrimiento de la sobreinformación, la expresión del sujeto termina siendo clara e inteligible.

Todo lo anterior nos da información acerca del *proceso* de cambio en la *Tarea 4*. La otra parte del interés del estudio, como se ha dicho, está en el *producto* de la actividad, que está formado por los objetos matemáticos realmente movilizados y por sus relaciones, o *funciones semióticas personales*.

Los objetos matemáticos involucrados en la Tarea 4 se presentan en la *Tabla 15* a continuación, que pone frente a frente los objetos institucionales pretendidos y los objetos



personales realmente abordados por el estudiante en la actividad, así como también señala los objetos que no fueron movilizados.

<b>Manipulativo 4</b>	
<b>Objetos matemáticos institucionales pretendidos</b>	<b>Objetos matemáticos personales realmente movilizados en la actividad</b>
Argumento: De acuerdo a todos los casos mostrados en el manipulativo, el valor numérico de la secante coincide con el de la razón de cambio	Argumento: De acuerdo a todos los casos mostrados en el manipulativo, el valor numérico de la secante coincide con el de la razón de cambio
Concepto: Recta secante	Concepto: Recta secante
Lenguaje: Cociente numérico de las diferencias vertical y horizontal entre los puntos de la gráfica	No movilizada explícitamente
Lenguaje: Definición verbal de la razón media de cambio entre dos puntos de una curva	Lenguaje: Definición verbal de la razón media de cambio entre dos puntos de una curva
Lenguaje: Gráfica de la curva	Lenguaje: Gráfica de la curva
Lenguaje: Símbolo para la pendiente de la secante $m_{sec}$	No movilizada explícitamente
Algoritmo: Calcular el cociente de desplazamientos $\Delta y / \Delta x$	Algoritmo: Calcular el cociente de desplazamientos $\Delta y / \Delta x$
Algoritmo: Calcular la razón media de cambio a partir del cociente de desplazamientos	Algoritmo: Calcular la razón media de cambio a partir del cociente de desplazamientos
Algoritmo: Calcular los desplazamientos horizontal y vertical entre dos puntos de la gráfica de la curva.	Algoritmo: Calcular los desplazamientos horizontal y vertical entre dos puntos de la gráfica de la curva.
Algoritmo: Interpretar la razón media de cambio como la pendiente de la secante que pasa por los puntos	Algoritmo: Interpretar la razón media de cambio como la pendiente de la secante que pasa por los puntos
Proposición: La razón media de cambio entre los puntos es la pendiente de la recta secante que pasa por ellos	Proposición: La razón media de cambio entre los puntos es la pendiente de la recta secante que pasa por ellos
Proposición: La razón media de cambio se expresa como la relación del número de unidades de desplazamiento de $f(x)$ respecto a un desplazamiento 1 en $x$ .	Proposición: La razón media de cambio se expresa como la relación del número de unidades de desplazamiento de $f(x)$ respecto a un desplazamiento 1 en $x$ .

**Tabla 15.** Comparación de los objetos matemáticos institucionales pretendidos y los personales

Por último se presenta en la *Tabla 16* el análisis del *postest 3* para la *Tarea 4*, es decir, aquella prueba efectuada en papel un tiempo después (en el caso de Erick, 28 días) de la actividad inicial del estudiante con los manipulativos, y que reúne evidencia de *acciones mentales* exteriorizadas que prescinden del uso de la computadora y del lenguaje comunicativo. En este análisis intervienen las dimensiones de cambio adicionales, como el *grado de abreviación, de atención, de flexibilidad y de entendimiento* que no intervienen en el discurso de arriba.

Postest 3 de la Tarea / Manipulativo 4	
Grado de abreviación de la acción en postest 3	El afán de abreviación en el que Erick hace el cálculo mental o visual, provocó el error en el resultado.
Grado de atención o auto-regulación en postest 3	No hay evidencia oral o escrita de que Erick se haya establecido a sí mismo metas de su desempeño o que las haya supervisado o evaluado. Sin embargo se infiere de su buen desempeño en el postest 3 que su auto-regulación es buena.
Grado de flexibilidad en postest 3	Aplica la misma estrategia que en el problema del postest 1 y 2. En realidad casi no hay opciones disponibles y no hubo ninguna otra experiencia posterior a la actividad inicial en la que Erick pudiera aplicar o extender el concepto.
Grado de entendimiento o insight en postest 3	No muestra errores estructurales cuando resuelve el problema dado.
Grado de consciencia o despliegue en postest 3	El grado de consciencia en la claridad de la expresión es <i>alto</i> aunque algunos conceptos no están completamente apegados a los institucionales, pero en esto la responsabilidad es del profesor, que no insistió en llevar a Erick a hacer una mejor formulación.

**Tabla 16.** *El análisis del postest 3 de la Tarea 4*

En el apartado de **Anexos** se presenta el diálogo completo y la traducción gráfica del proceso de evolución para cada una de las dimensiones del cambio. Se presenta

igualmente la comparación entre el significado personal movilizado y el significado institucional pretendido para cada tarea o manipulativo.

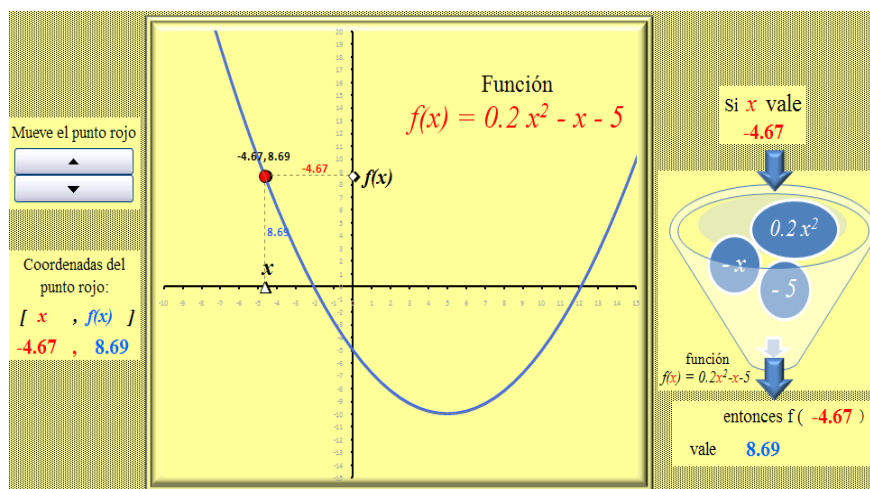
[\(A la tabla de contenidos\)](#)

## V . Discusión

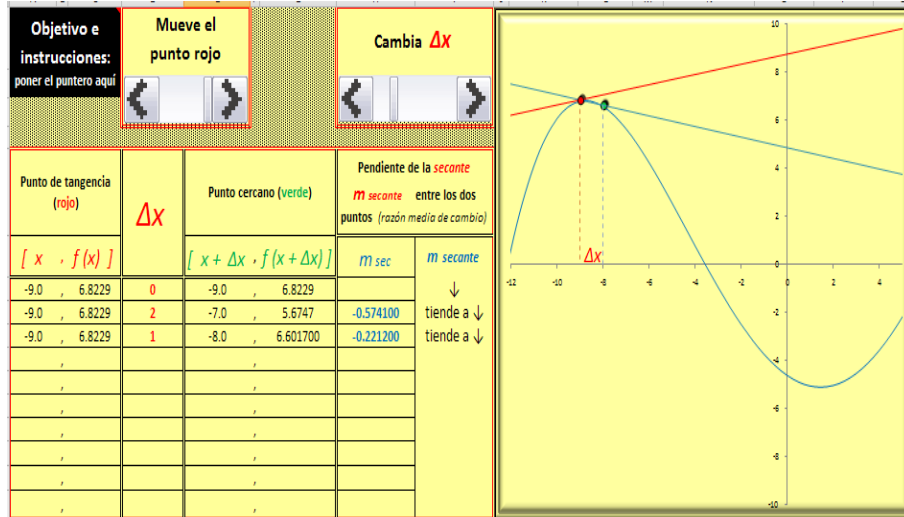
### V.1 Interpretación teórica de los datos

Se consideran primero en este apartado algunas características de los manipulativos y de las preguntas del profesor al sujeto durante la actividad, en relación a los referentes teóricos de esta tesis. Enseguida se pondrán en relación las acciones y operaciones de la actividad de Erick con dicha teoría.

En el diseño de los manipulativos está implícito el hecho de que cualquier objeto matemático (fórmula, algoritmo, gráfica, símbolo) está expresado en su relación con otros registros semióticos del mismo objeto, como sugiere Duval (2003), Tall (1990), Larson, Hostetler y Edwards (2006 ) y muchos otros. Por ejemplo en el Manipulativo 0a, tenemos



la representación de una función en un registro semiótico algebraico  $f(x) = 0.2x^2 - x - 5$ , en un registro gráfico tanto en la curva como en los puntos específicos que la forman, en un registro numérico como las coordenadas de cada punto y la imagen de la función como una *máquina* que acepta una entrada y arroja una salida. Pero lo que es más importante es el hecho de que cada vez que se cliquea en la barra de desplazamiento, todas las representaciones cambian coordinadamente enfatizando su relación abstracta, característica que denota a los *conceptos científicos* según Vygotsky (1978), aquellos que están enlazados en un sistema de objetos, lo cual implica para este autor su uso consciente. Lo que vemos en el manipulativo es el *uso funcional de los signos*, generador de conceptos. Lo mismo encontramos en todos los manipulativos, como el Manipulativo 5, en el que se encuentran registros gráficos, numéricos y simbolismos en estrecha correspondencia.



Otra importante característica presente en los manipulativos es el *uso funcional de los signos* al que Vygotsky (1978) y Berger (2006) entre muchos otros ponderan como el factor principal de la formación de los conceptos. En efecto, lejos de presentar una idea matemática a través de una definición para después aplicarla en un problema, en la

experiencia aquí investigada el sujeto usa el manipulativo para ver de entrada al signo o al objeto en su funcionamiento o en acción, para intentar luego definirlo verbalmente en varios *niveles de generalización* (Mortimer, 2000), de *explicitación* (Falcade, 2006) y de *entendimiento o insight* (van der Heijden, 1994) entre otras dimensiones, utilizando los símbolos sugeridos también por el manipulativo. Esta acción sobre los manipulativos, acompañada de las preguntas del profesor o las que están en el propio manipulativo, está destinada a abrir una *zona de desarrollo próximo* del sujeto (Vygotsky, 1978) en la que este se adentra para posibilitar un nivel más alto de desarrollo psicológico.

Vistos desde los *factores de interactividad* de Sedig y Hai-Ning (2006), los manipulativos advierten al sujeto sobre las posibles interacciones a través de la barra de desplazamiento que hay en cada uno. En la actividad, Erick descubrió muy rápidamente que la interacción posible proviene de esa barra, y además que esta provee al manipulativo de una *restricción dirigida* que focaliza la atención en ciertos elementos, que son los que cambian con la manipulación. En esta restricción y focalización de la acción resulta a veces indispensable la labor discursiva del profesor. Desde el segundo manipulativo no hubo necesidad de que el profesor señalara a Erick el uso de la barra. La *distancia semántica* (Sedig y Hai-Ning, 2006) entre los manipulativos y los significados del sujeto demostró ser aceptable, pues el manipulativo se apoya en conocimientos previos convencionales para los temas tratados, como el dominio del plano coordenado y el de algunos conceptos geométricos tales como el de coordenada, gráfica, recta tangente o secante. Se pudo comprobar en la actividad que hay igualmente una aceptable *idoneidad epistémica* (Sedig y Hai-Ning, 2006) en el sentido de que los manipulativos ayudaron a que el sujeto descubriera las relaciones básicas necesarias al aprendizaje de los contenidos y que no lo

obstaculizaron. Habría que hacer un análisis más fino para ver si el nivel de las relaciones manejadas en los manipulativos facilitan u obstaculizan aspectos más sutiles de los objetos al momento de enfrentar un nivel superior de matemáticas (Tall, 1990). Los manipulativos ofrecen *retroalimentación* instantánea que provoca o facilita la revisión de estructuras cognitivas ya formadas o, como fue el caso de la actividad estudiada, de relacionar entre sí objetos alrededor de una problemática, afinando su significado pragmático. Además se tiene la ventaja de que es el propio sujeto quien controla la velocidad del flujo de información y el posible regreso a un manipulativo en particular, adaptando la velocidad a sus condiciones personalizadas. El diseño de los manipulativos está pensado para centrar el foco de atención sobre unos objetos específicos, y a esta labor contribuyen las preguntas pre-diseñadas del profesor y sobre todo las preguntas suscitadas en el curso de la actividad cuando el sujeto no encuentra o pierde ese foco. Creemos que el *grado de implicación* (Sedig y Hai-Ning (2006) de Erick con el manipulativo se situó en un muy sano punto medio entre la pura observación pasiva y el total construccionismo, es decir, que en el manipulativo Erick ciertamente observa cosas, pero esto se da gracias a la acción de Erick y las posibilidades de interacción del manipulativo. La acción sobre el manipulativo induce a la observación intencionada de sus propiedades.

Consideremos ahora las preguntas pre-diseñadas que el profesor quiere hacer al sujeto durante la Tarea 0b: *1. Describe lo que pasa con la recta tangente y la forma de la gráfica alrededor y en los puntos A, B y C, mientras observas el signo y valor de  $m_{tan}$ . 2. ¿Qué relación encuentras entre el valor y signo de la pendiente de la recta tangente  $m_{tan}$  y el "comportamiento" de la recta y de la curva? 3. Si en un punto de la gráfica  $m_{tan}$  vale 0, ¿cómo puedes saber si se trata de un punto máximo o uno mínimo? La*

intención es que con la pregunta 1 el sujeto haga primeramente una *descripción perceptual* (Mortimer, 2000) de la situación, eso es, quiere comenzar conscientemente en el nivel más bajo de generalización para que desde esa base, el sujeto construya los niveles superiores. La pregunta 2 busca que el sujeto encuentre una relación causa-efecto entre  $m_{\tan}$  y las características de la gráfica en ese punto, es decir, que establezca una *explicación* primero *perceptual* y luego *teórica*. Para responder a la pregunta 3 es necesario que el sujeto haya elaborado descripciones y explicaciones sobre el contenido del manipulativo, y con esto estar preparado para hacer generalizaciones de tipo teórico (Mortimer, 2000), todo lo cuál quiere completar el movimiento hacia una *función psicológica superior* (Vygotsky, 1978) que se extrae primero del contexto particular donde surgió y luego se usa como reserva para futuras situaciones semejantes. Esta contextualización y su posterior re-contextualización puede referirse también a los signos creados y aplicados en una actividad que se lleva a cabo gracias a la *internalización* (Arievitch, 2003), y a la posterior *mediación semiótica* (Vygotsky, 1978; Valsiner, 2001).

Lo que sucedió en la práctica en la Tarea 0b es que la acción se mantuvo mucho tiempo en el nivel de *descripción perceptual*, pues había conceptos y sobre todo relaciones nuevas para Erick. Resultó indispensable la *mediación moderada* del profesor (Kuo, Chang y Wang, 2002), que tuvo que hacer preguntas más focalizadas o específicas, además de recordar continuamente el objetivo del manipulativo, hasta que Erick logró una comprensión súbita para saltar rápidamente y en forma independiente a la *generalización teórica*. Los postest 2 y 3, en el que se pidió a Erick trazar una gráfica a partir de datos sobre valores de  $f(x)$  y  $m_{\tan}$  en puntos e intervalos interesantes de la misma, confirmaron que logró un comportamiento intencional y auto-regulado basado en la *mediación semiótica*

(Vygotsky, 1978) lograda a consecuencia de la *internalización* de la acción material y verbal (Arievitch y Haenen, 2005; Koshmanova, 2007; Werstch, 1997) con el Manipulativo 0b.

Esta acción material con los signos del manipulativo 0b, a saber, una curva, una recta tangente que la recorre, y el valor de la pendiente de la tangente, hizo que Erick pudiera derivar una regla o relación directamente de la acción con la naturaleza y requerimientos de esos objetos y no desde definiciones pre-formuladas. Esto es acorde con lo señalado por Ilyenkov (2007), en lo que toca a que el conocimiento de esos objetos no proviene de una estructura situada fuera de ellos. El *postest 3*, efectuado 28 días después de la actividad inicial con el manipulativo 0b, corroboró la sólida presencia de las relaciones abstractas entre los objetos del manipulativo en la estructura cognitiva de Erick.

El flujo de las acciones y operaciones que constituyen la actividad fue dado por el propio diseño de las tareas, que en sus fases más generales siguen el ciclo de acciones marcado por Galperin (en Arievitch y Haenen, 2005): *acción material* (acción con los signos en el manipulativo), *acción verbal* (referirse a la acción en el manipulativo material pero sin verlo o activarlo), y *acción mental* (que prescinde de las anteriores). Lo que Galperin quiere estudiar, al igual que esta tesis, es la formación paso-a-paso de *acciones mentales* en este caso referidas a los objetos matemáticos mencionados. Es decir que estas *acciones mentales* no son facultades mentales o internas de Erick (Zinchenko, 1997) ni reflexión de su proceso cerebral, sino que son acciones ligadas a los objetos del Manipulativo 0b pero que se ejecutan sin activarlo físicamente. Al desarrollar las acciones a ese nivel, Erick demostró que estas habían sido correctamente *internalizadas*.



En el curso de la interacción entre Erick y el profesor, cuyo seguimiento puede verse en los *Anexos* en la gráfica correspondiente al Manipulativo 0b y en el *grado de explicitación*, puede verse que hay gran fluctuación e irregularidad en el discurso que se mueve entre *caracterizaciones* (Falcade, 2006) y *no correspondencias*, ya que Erick consume un tiempo relativamente largo para captar la relación de  $m_{\tan}$  con la forma de la curva. Su discurso no muestra correspondencia con el saber institucional cuando se le pregunta sobre ¿cómo saber si un punto donde  $m_{\tan}$  es 0, es un máximo o un mínimo local? Cuando tiene una revelación debido a la mediación moderada del profesor en la que este sugiere una estrategia de observación para llegar a la respuesta, Erick llega con rapidez al nivel de *definiciones* en el sentido de Falcade (2006).

Continuando con la interpretación de la actividad con el manipulativo 0b, Erick se mueve con alta independencia al principio, recibiendo sólo instrucciones y pistas de parte del profesor, lo que corresponde a una *tutoría de orientación* (Kuo, Chang y Wang, 2002). Cuando surge la duda sobre el criterio para saber si un punto donde  $m_{\tan}$  sea 0 es un máximo o un mínimo local, se hizo necesaria la *mediación moderada* del profesor, que focaliza y afina la pregunta y sugiere una estrategia en relación al contenido del manipulativo. Esa intervención del profesor reduce transitoriamente pero en forma considerable el *grado de independencia* de Erick (van der Heijden, 1994), pero después de la comprensión súbita, vuelve a actuar en forma independiente. Como el manipulativo 0b se convirtió en el campo donde Erick y el profesor intercambiaron y afinaron ciertos significados, y ese fue el caso de todos los demás manipulativos, quedó ilustrada la transición entre el *manipulativo-artefacto* y el *manipulativo-instrumento* de la que habla Rabardel (1999). También pudo verse en la actividad de la tarea 0b, que el uso que hace

Erick del manipulativo no garantizó por sí mismo que él alcanzara los significados institucionales pretendidos. Ante las dudas y estancamientos en el discurso de Erick, la labor del profesor recordando una y otra vez que se busca la relación de  $m_{\tan}$  con la forma de la gráfica, fragmentando la pregunta y enfocando la atención de Erick en los signos que toma  $m_{\tan}$ , resultó ser indispensable para ver la conversión del *manipulativo-instrumento* en *manipulativo-mediador semiótico*, tal como señala Mariotti (2002). Se comprueba en este sentido uno de los supuestos iniciales de esta tesis, tomado justamente de esta autora y de la tesis de Falcade (2006), referido a la labor del profesor en la actividad de un sujeto con instrumentos de mediación semiótica.

Por lo que toca a la completez, inteligibilidad y claridad de la expresión de Erick durante la Tarea 0b, que revelan su *grado de consciencia* sobre esta (van Der Heijden, 1994), se mantiene un nivel medio gran parte del tiempo, y desciende lógicamente a un nivel más bien bajo en el momento de la duda ya expresada. Después de la revelación ayudada por la mediación del profesor, la expresión de Erick termina siendo de nivel alto.

Gracias al *postest 3* aplicado un tiempo después de la actividad inicial, se tuvo la oportunidad de valorar otro cuerpo de cuestiones tales como la *abreviación* de las operaciones (van Der Heijden, 1994). En el caso de Erick, y a pesar de la lentitud con la que responde al *postest*, se puede decir que existe un alto nivel de *abreviación*, pero no en la comparación del desempeño entre los *postest 1, 2 y 3*, sino dentro de cada uno de ellos, pues la respuesta a la tarea así lo mostró desde el principio. En efecto, en los tres *postest* descritos arriba, el conjunto de operaciones fue justo lo que se requería, y no hay una abreviación visible entre ellos, cosa comprensible por lo ya explicado. Lo mismo puede decirse del *grado de flexibilidad* (van Der Heijden, 1994) en el *postest 3*. Siendo las

operaciones realizadas las justas para resolver el problema, no hay necesidad de buscar estrategias competidoras, además de que no hubo ninguna experiencia adicional para que Erick aplicara o extendiera el significado alcanzado desde la primera actividad.

La interpretación sobre las dos dimensiones anteriores es igualmente válida para juzgar el grado de *entendimiento o insight* que tuvo Erick en el *postest 3*. Cuando Erick comprendió finalmente las relaciones presentes en el manipulativo 0b, tuvo lo suficiente para enfrentar el *postest 1 y 2*, y no cometió ningún *error estructural* (Naidoo, 2007) en ellos. En *postest 3* el problema fue resuelto 28 días después en la misma forma, sin repetir error alguno, lo que vale para decir que el *grado de entendimiento* de Erick fue alto.

En los *postest* Erick aplica medios artificiales, es decir los signos *internalizados* a través de la acción material con el manipulativo, para mostrar un *comportamiento de orden superior*, aquel al que Vygotsky (1978) se refiere como producto de la combinación de herramientas y signos en la actividad psicológica. Estos signos al principio ayudaron a la formación de los conceptos de Erick y se convirtieron luego, en el *postest 3*, en medios de su simbolización u objetivación, como también piensa Radford (2000).

En los *Anexos* se presentan elementos para la discusión para el resto de las tareas.

## **V.2 Recomendaciones para futuras investigaciones**

Como se dijo en el apartado de Justificación, los resultados de esta investigación pueden ser usados como hipótesis en un estudio experimental que considere un número elevado de sujetos y una muestra aleatoria. En este caso se hace impráctico el uso del software *Adobe Captivate* como se hizo en esta tesis doctoral, ya que este es ideal para

registrar la acción material y discursiva en un escenario de actividad formado por uno o dos estudiantes y un profesor interactuando con manipulativos virtuales. En su lugar tendría que haber como instrumento de recolección de datos un registro escrito que pudiera ser codificado con un esfuerzo razonable dado el número elevado de participantes. Este experimento podría contrastar grupos experimentales y de control que pusiera frente a frente los resultados de las muestras aleatorias, una en el caso del uso exclusivo de manipulativos virtuales, otra a partir de una experiencia de aprendizaje que no los use, y quizá otra con una muestra que usa manipulativos antes de una clase tradicional o antes de la lectura de textos de matemáticas. Una posible pregunta de investigación giraría en torno a la comparación de la calidad del significado de los objetos matemáticos (red de *funciones semióticas*) lograda a través de manipulativos contra la calidad lograda por otro método en los distintos estratos de la muestra. Podrían compararse asimismo los porcentajes de los *errores estructurales, ejecutivos y arbitrarios* cometidos por los sujetos cuando resuelven problemas que aplican esos objetos matemáticos. Otra posible investigación podría estudiar el efecto de los manipulativos virtuales en la aproximación de sujetos más jóvenes, digamos de 15 años o menores, a objetos e ideas matemáticas tradicionalmente reservadas a sujetos escolarizados mayores como es el caso de estudiantes de bachillerato o universitarios. Otra investigación podría avocarse al estudio de sutiles diferencias conceptuales y procedimentales en sujetos que aprendieron los objetos matemáticos a través de distintas aproximaciones de aprendizaje, como pudieran serlo los manipulativos virtuales, a través de lectura de textos o de una clase magistral, habida cuenta de que distintos medios de aprendizaje pueden arrojar como resultado el énfasis en distintos matices o aspectos de los contenidos aprendidos o internalizados. Un posible estudio distinto podría investigar exclusivamente la elaboración de demostraciones matemáticas a través del uso de

manipulativos virtuales, y otro a las limitaciones y alcances de este uso en la completez del significado de los objetos matemáticos tratados. Una variante o extensión del caso estudiado en esta tesis doctoral, es la comparación del significado de los objetos en sujetos que usan los manipulativos virtuales con y sin la presencia del profesor, investigando el efecto de la presencia de este en los resultados finales o en el proceso de *internalización*.

### V.3 Implicaciones teóricas y prácticas de esta investigación

Pensamos que la argumentación que organiza, articula y complementa a las teorías estudiadas en el marco teórico de esta tesis doctoral, conforma un modelo didáctico en matemáticas que puede potenciar el aporte que cada una pudiera tener por separado. Pongamos por ejemplo el planteamiento pragmático y semiótico de Charles S. Peirce, que está presente de manera implícita en esta tesis en todo lo relativo a los aspectos semióticos. En él se establece la relación triádica indisoluble entre *un objeto*, *un signo* y *un interpretante*, lo que constituye a la *semiosis*, lo que es una relación lógica y necesaria pero que no nos dice nada acerca de cómo generarla. La *teoría histórico-cultural* y la *teoría de la actividad* pueden aportar elementos para posibilitar ese proceso de *semiosis*. Además, si la cuestión es aclarar cuáles son los objetos, signos e interpretantes necesarios a una disciplina como la matemática, el *enfoque onto-semiótico de la didáctica de las matemáticas* puede aportar la respuesta, basada en una aproximación antropológica y semiótica que considera el significado de un objeto como el sistema de prácticas culturales sobre los componentes que lo forman. Pero a su vez como este enfoque es usado para evaluar una experiencia de aprendizaje y no es didácticamente prescriptivo, se vuelve necesario un aporte como el de Piotr Galperin para tratar el *cómo* didáctico mientras el *enfoque onto-semiótico* aporta el *qué*. La propuesta de articulación teórica elaborada en esta

tesis, insistimos, es un aporte que puede complementar a las propias teorías aisladas con vistas a su aplicación didáctica.

Desde el punto de vista metodológico, esta tesis se apoya en la aserción de Vygotsky (1978) en lo relativo a la búsqueda de método: en cada investigación el método es a la vez requisito y producto, herramienta y resultado. En este sentido aquí se aporta una síntesis, cuerpo o batería de criterios de seguimiento del proceso evolutivo con el cual poder describir y explicar los procesos histórico-culturales a escala microgenética: las *dimensiones del cambio* que provienen de autores y de posturas diversas. La codificación numérica propuesta para cada una de estas dimensiones, basada en una detallada descripción de sus estadios, ha permitido representar en una forma gráfica y visual la evolución del discurso y contar con un criterio unificado para tal fin.

Por otro lado, la caracterización del significado de los objetos matemáticos planteada a través de una red de funciones semióticas que conecta a todos los componentes de ese significado (D'Amore y Godino, 2007), ofrece un modelo práctico a profesores de matemáticas exportable quizá a otros campos, para aclarar los objetivos del aprendizaje y los esfuerzos de evaluación. Pensamos que esa caracterización del significado conforma una idea de *competencia* en la disciplina matemática. La *competencia matemática* sería esa red de lenguajes, conceptos, operaciones, proposiciones y argumentos tejida alrededor de una situación problemática que los integra. Esa claridad en los componentes de la *competencia* permitirá, insistimos, enfocar mejor la docencia y facilitar la evaluación formativa y sumativa del aprendizaje al considerar elementos discretos para la misma. La red de *funciones semióticas* arriba aludida expresa claramente la diferencia entre los *conceptos cotidianos* y los *conceptos científicos* según lo plantea Vygostky, pues este autor

señala que los *conceptos científicos* o genuinos se caracterizan por estar incluidos en un sistema jerarquizado junto a otros conceptos, de lo que se deduce su uso consciente.

Recordemos que sistematización y consciencia son sinónimos para Vygotsky. El significado de un objeto matemático, visto como el sistema de prácticas culturales a propósito del mismo, puede tomarse como sinónimo de *competencia matemática* en lo que respecta a tal objeto.

#### **V.4 La respuesta a las preguntas de investigación**

La actividad en el escenario compuesto por unas tareas diseñadas para que un estudiante se aproxime y relacione entre sí una serie de objetos matemáticos con la ayuda de manipulativos virtuales y de la interacción con un profesor, se ha registrado con un software especial que ha capturado las acciones materiales y verbales de los sujetos. Esta actividad ha sido complementada con pruebas escritas en las que el estudiante ha resuelto problemas relativos a los objetos estudiados. Esto ha permitido documentar tanto el proceso como el producto de la actividad a través de su transcripción escrita en una base de datos. Las preguntas de investigación han sido respondidas analizando el discurso registrado, regresando a él tantas veces como dimensiones del cambio interesa observar, a saber: por el grado de abstracción, de generalización y de explicitación del lenguaje del sujeto, por su grado de independencia, por la abreviación final de sus operaciones, la auto-regulación, la flexibilidad, el entendimiento y la consciencia mostradas en el discurso oral y escrito. El estudio de la evolución de estas dimensiones, expresada en gráficas y explicada verbalmente, es el objetivo de esta tesis. Pensamos que esto se ha logrado cabalmente, ofreciendo una descripción densa de la forma en la que el proceso alcanza el producto, que es el significado de los objetos matemáticos involucrados tomado como la red de funciones

semióticas establecidas entre los componentes del significado. Esta situación problemática es un corte arbitrario en la red de objetos que conforman el saber matemático: la descripción del comportamiento de la gráfica de una función a través de la pendiente de la recta tangente a la gráfica en distintos puntos. Esto ha permitido al sujeto la creación o movilización o relación de un importante número de objetos matemáticos que forman una base conceptual y procedimental concreta (integrada) para introducir a la Derivada.

### **V.5 Limitaciones de la investigación**

Los manipulativos usados en la actividad investigada comportan un nivel introductorio a las ideas matemáticas pretendidas. Por lo tanto presentan casos ejemplares de esas ideas y no abarcan casos extraordinarios, anomalías o contraejemplos que servirían para matizar, afinar y profundizar los conceptos, tal como recomiendan muchos profesores y autores como David Tall (1990). Sería necesario crear e investigar los efectos de manipulativos que abordaran esos aspectos sutiles que puedan ayudar a extender los conceptos.

Por otro lado, en esta tesis doctoral se tiene consciencia de que considerar al desarrollo mental solamente como el residuo en el sujeto de la actividad de *internalización* de herramientas culturales necesarias para resolver cierto tipo de problema, como los que involucran a los objetos matemáticos estudiados, es ciertamente una limitación. Pensamos con Labarrere-Sarduy (2000) y con Koshmanova (2006) que el desarrollo es algo más que la capacidad emergente en el sujeto para enfrentar en forma independiente una variante de situación problemática que antes la enfrentaba con el apoyo de otro sujeto más capaz y de artefactos culturales. Pero también estamos de acuerdo con Iudin (en Lazarev, 2004)



cuando afirma que el estudio de la actividad humana sólo tiene una interpretación objetiva en algún campo específico de conocimiento, lo que proporciona límites también específicos, además de que las acciones y operaciones de una actividad se investigan en el ámbito de un objeto de estudio igualmente acotado.

Es posible que el hecho de que el estudio de caso con un único sujeto estudiado en esta tesis sea visto como una limitación. A este respecto había que remitirse a lo dicho por Lavelli, Pantoja, Hsu, Messinger y Fogel (2005). Estos autores afirman que si una investigación dedica un tiempo considerable a la observación intensiva de un número limitado de casos, se tiene la oportunidad de ver con gran detalle la dinámica de los cambios en ellos. Si por el contrario el tiempo y los recursos se dividen en un gran número de casos, como en una investigación más tradicional, entonces es inevitable que se puedan hacer menos observaciones en cada uno. O sea, que el número de casos estudiados es inversamente proporcional al número de observaciones que pueden hacerse en ellos. Aquí se han hecho un gran número de observaciones a un único sujeto. Existe otro argumento que apoya al anterior: el estudio de casos ha sido sistemáticamente usado para analizar casos clínicos individuales como en los estudios piagetianos, y no sólo para tratar de deducir leyes generales de desarrollo a través de muestras grandes. En los estudios de tipo clínico, la validez y confiabilidad tienen más que ver con la riqueza de la información recabada en los casos y con la capacidad observacional o analítica del investigador, que con el tamaño de la muestra (Patón en Lavelli y otros, 2005). Además, la intención al estudiar un caso no es su posibilidad de generalización sino la mayor comprensión de un cierto fenómeno que pueda ser utilizada en diseños de investigación de otros tipos. [\(A la tabla](#)

[de contenidos\)](#)

## VI. Conclusiones

### VI.1 Sobre el proceso

Las conclusiones de esta investigación no apuntan a generalizar sus resultados a una población más amplia, sino a que su esencia pueda aplicarse en otros contextos similares. Como se ha dicho en el apartado sobre las cuestiones de validez de la investigación, un caso único no puede generalizarse a otras situaciones, pero contribuye a un mayor conocimiento del fenómeno y a establecer pautas para futuros estudios semejantes.

En lo relativo al *grado de abstracción* en la ejecución de las tareas en el caso particular estudiado, las acciones en todas ellas arrancan siempre con *acción material* en el manipulativo en un periodo muy breve, y se muestra luego la predominancia de la acción *material-verbal*: la mitad de las intervenciones totales se ejecutan en ese nivel, que consiste en la acción del sujeto con el manipulativo mientras intenta responder a las preguntas del profesor. Fue necesario ampliar las categorías originales de Galperin al momento de adaptarlas a la experiencia real con los manipulativos, pues hay traslapes al momento en que el sujeto habla mientras acciona el manipulativo, o habla mientras ve, imagina o visualiza el manipulativo pero sin accionarlo. De ahí nacen las categorías *material-verbal*, y *perceptual-verbal*, esta última apoyada en van Erp y Heshusius (1986).

Cuando el sujeto no ha entendido aún las relaciones del manipulativo o muestra alguna confusión, con frecuencia hay una alternancia irregular con *acción perceptual-verbal*. La acción puramente *verbal* se da en los casos en que el sujeto conoce previamente los componentes del significado y los expresa oralmente, o la facilidad del tema lo permite o es un conocimiento logrado en el manipulativo anterior. Hay regresos a la acción

*material-verbal* cuando en el discurso se necesita establecer una nueva relación no descubierta espontáneamente. El regreso puede darse incluso en los postest. Pero en general la acción en los postest se hace a nivel mental (externalizada), prescindiendo de acción con los manipulativos y de acción verbal comunicativa, cuando el sujeto articula todos los componentes de significado tratados en la tarea. Si el sujeto encuentra un obstáculo en la tarea y está ejecutando sólo acciones a nivel *material*, *material-verbal* o *perceptual-verbal* y no encuentra respuestas, debe aumentar el nivel de mediación del profesor, usualmente a nivel suave o mediano, excepcionalmente de grado fuerte, para superar el obstáculo. El profesor puede pedir al sujeto cerrar el discurso antes de los postest con una recapitulación a nivel *verbal*, que sirve para que el sujeto formule el significado con un grado mayor de consciencia. En general la trayectoria de las acciones es ascendente pero la razón de cambio es muy lenta al principio, y se acelera cuando el sujeto encuentra y formula la relación pretendida en el manipulativo. Se puede decir que la trayectoria y la razón de cambio de las acciones son irregulares.

En cuanto al *grado de generalización* del discurso del sujeto, se puede decir que cuando las preguntas del profesor tocan un punto que el sujeto no conoce, o lo conoce poco o no lo relaciona con otros objetos, hay por tanto temas o relaciones nuevas, y en consecuencia lo que se dan son *descripciones perceptuales* apoyadas en el manipulativo. Si el sujeto conoce previamente algún componente del significado se producen *explicaciones teóricas*. Si conecta componentes conocidos y poco conocidos, encontramos *explicaciones* y *generalizaciones perceptuales*. En los momentos de duda o estancamiento del discurso del sujeto, con el regreso a *descripciones perceptuales*, se hace necesaria la mediación suave o moderada del profesor que focaliza o amplía la pregunta y se establece un diálogo

más prolongado hasta que el sujeto logra una comprensión súbita y alcanza rápidamente *explicaciones y generalizaciones teóricas*. Estas últimas se dan en los posttest al final del proceso pero también si el tema o relación tratado es muy fácil o cuando el sujeto ha resuelto antes un problema parecido. La trayectoria en la generalización es un tanto irregular pero siempre ascendente con la ayuda de la mediación del profesor.

Cuando al momento de las preguntas el sujeto conoce previamente algunos componentes del significado, el *grado de explicitación u objetivación* es en el nivel de *caracterizaciones*. Si conecta esos componentes con otros objetos del manipulativo, alcanza *definiciones*. Mientras no percibe las relaciones pretendidas es común que el sujeto regrese a las *ejemplificaciones* o que exista una gran fluctuación e irregularidad entre *caracterizaciones y no correspondencias*. En la comprensión debida a la mediación moderada del profesor, que sugiere una estrategia para llegar a la respuesta, el sujeto llega con rapidez al nivel de *definiciones*. También hay *definiciones* si ha resuelto antes un problema muy parecido. En general se presenta una gran irregularidad en el nivel de explicitación de bajo nivel si se introducen objetos matemáticos o relaciones nuevas para el sujeto, pero es superada gradualmente con la mediación moderada o fuerte del profesor que recuerda una y otra vez el objetivo, da pistas y hace preguntas de acercamiento que enfocan la atención en aspectos específicos esperando que el sujeto los vaya conectando con lo que ha dicho y con lo que está haciendo en ese momento en el manipulativo, hasta alcanzar *caracterizaciones y definiciones*.

El *grado de independencia* del sujeto está en proporción inversa a la intensidad de la tutoría o de la mediación del profesor. A mayor intensidad de tutoría o mediación, es menor la independencia del sujeto. El tipo de interacción inicial del profesor siempre es el

mismo, la interacción de tutoría o de orientación en el que se ofrecen instrucciones y pistas al sujeto, lo que le otorga relativa independencia para explorar el manipulativo bajo la guía del profesor. El nivel de mediación que ofrece el manipulativo es también constante, la mediación fuerte grado 1, pues muestra directamente al sujeto una estrategia a seguir. En los momentos en que el sujeto se desvía del objetivo o da respuestas alejadas del significado institucional, el profesor hace preguntas adicionales, explicita o devuelve las preguntas al sujeto, entrando en combinación con el manipulativo al dar una mediación fuerte y asegurarse de que las respuestas del sujeto converjan hacia las institucionales. En el postest 2 y 3, el sujeto actúa completamente independiente de las mediaciones del manipulativo y del profesor a pesar de que tiene acceso a aquel. La interacción más frecuente es la de tutoría u orientación, lo que significa que el sujeto actúa con relativa independencia casi todo el tiempo. Sólo ante las dudas u obstáculos la independencia disminuye temporalmente y el profesor debe ayudar a que el sujeto supervise su respuesta errónea o retroalimente esa respuesta buscando que el sujeto la aborde de otra manera. Llegada la comprensión la acción es de nuevo independiente. La interacción de mediación del profesor es crucial respecto al nivel de entendimiento del significado de un objeto, pues él decide si acepta el nivel actual o profundiza la exploración del manipulativo y las preguntas para que el sujeto alcance un nivel de entendimiento mayor. Si el profesor no hace esa labor, el estudiante mantiene el nivel actual.

Cuando el sujeto expresa conocimientos previos, lo hace inteligiblemente y con claridad, teniendo con esto un alto grado de consciencia o despliegue. Pierde naturalmente claridad cuando encuentra una noción poco conocida que intenta expresar al nivel de dichos conocimientos previos, si duda o desconoce un componente del significado pretendido en el

manipulativo o no descubre la intención de este ni las respuestas. La claridad es también baja si el sujeto responde a una cuestión muy fácil para él y no considera necesario ser más claro en su expresión, por lo que no le hace falta abundar en el lenguaje y prefiere expresarse con una fórmula. En estos casos hace falta que el profesor lo induzca a formular con claridad su hallazgo. De nuevo, gracias a la comprensión lograda por la interacción con el profesor, en el que puede haber intercambios aparentemente infructuosos que tratan de aclarar el objetivo y la dinámica del manipulativo, el grado de consciencia o despliegue puede ser alto. Para esto el profesor tiene que hacer preguntas más específicas que focalizan las cuestiones importantes, de manera que la expresión del sujeto vaya mejorando. La claridad es alta cuando el profesor pide que el sujeto defina los conceptos tratados en el manipulativo, que fueron los más problemáticos por ser nuevos e incluir ideas sofisticadas, como por ejemplo la noción de lo infinitamente pequeño.

Las preguntas pre-diseñadas que el profesor debe hacer al estudiante al momento de la manipulación de los objetos en la computadora, en ocasiones no fueron hechas tal como se formularon originalmente, sino que fueron adaptadas de acuerdo a las circunstancias de la interacción. Por esto mismo algunas preguntas fueron omitidas u olvidadas, por lo que puede dificultarse u obviarse en consecuencia la generación de alguna *función semiótica pretendida*. En una futura experiencia, el profesor debe asegurarse de que el estudiante aborde las preguntas relativas a todas las *funciones*.

El postest 3 se hace varias semanas después de la actividad inicial y quiere valorar los conocimientos relativos a las siete tareas/manipulativos. En este postest se presenta la oportunidad de valorar varias dimensiones del cambio que no pueden observarse de otra manera. Es el caso del *grado de abreviación* de las acciones, que prácticamente no muestra

cambios. El sujeto resuelve el postest 3 en la misma forma en la que resolvió los postest 1 y 2, sin abreviación alguna. Esto es debido a dos factores: no hubo ninguna experiencia adicional entre el postest 2 y el postest 3 en la que el sujeto pudiera extender o aplicar lo internalizado en la actividad inicial, y con esto poder depurar los elementos fundamentales y desechar los no significativos. Por otro lado, las acciones y operaciones ejecutadas por el sujeto en la actividad fueron desde el principio las justas y necesarias para ella. Cuando el sujeto intenta responder al postest 3 ejecutando precipitadamente cálculos en forma exclusivamente mental, cae en error, pero a la vez muestra un buen grado de abreviación de la acción deseada, que al ejecutarla en papel, es correcta. La *abreviación* entonces se logra durante la actividad misma con el manipulativo y durante los primeros dos postest que se hacen inmediatamente después. No es necesario esperar un tiempo para comprobar el logro de un mayor grado de abreviación, a menos que se esté valorando o midiendo en forma regular a lo largo de un periodo de tiempo.

Estas mismas consideraciones se pueden hacer para las demás dimensiones del cambio valoradas en el postest 3. Respecto al *grado de entendimiento o insight*, el sujeto resuelve ese postest sin cometer errores estructurales, en la misma forma en que no los hubo en los postest anteriores. Tampoco puede notarse algún cambio en el *grado de flexibilidad* para aplicar otras estrategias de solución a los problemas, por las mismas razones arriba anotadas y porque prácticamente no hay opciones a la estrategia lograda en la actividad inicial. Lo mismo puede decirse del *grado de entendimiento* y del *grado de consciencia* en el postest 3.

## **VI.2 Sobre el producto**

El número de *objetos matemáticos* y de las *funciones semióticas personales* que relacionan esos objetos generados por la actividad, alcanza un alto porcentaje respecto al número de *funciones semióticas institucionales pretendidas* en el caso estudiado. Esto es así porque la actividad investigada está orientada a ello, justamente a la formación intencional de estas funciones y no a consignar lo que el azar o las circunstancias generen, como en otros diseños de investigación. Por lo observado, es común que las *funciones semióticas* no movilizadas sean aquellas que son altamente agregadas o concretas, como los *argumentos* y las *proposiciones* que hacen uso de conceptos, operaciones y lenguajes distintos de representación. Pero estos *argumentos* y *proposiciones* están en casi todos los casos de cualquier forma presentes y se pueden inferir del desempeño del sujeto sobre todo en los posttest. Aunque no sean explícitas, estas funciones están presentes al dirigir implícitamente las acciones y operaciones del sujeto en la actividad. La tutoría y la mediación del profesor al solicitar al sujeto una formulación, las podría volver explícitas. La responsabilidad entonces para que esto suceda está en el profesor y no en el sujeto o en los manipulativos. Lo mismo puede decirse del *grado de explicitación, de generalización y de consciencia o despliegue* del discurso del sujeto con el que expresa las *funciones personales*: dependen de la labor del profesor el que estas dimensiones lleguen a niveles cada vez más cercanos a los institucionales, a menos que la intención didáctica sea la de únicamente formar una base de nociones que facilite o/y acelere la aproximación a los objetos matemáticos en el marco de una clase expositiva o de la lectura de textos. En ocasiones, el objeto no movilizado es la expresión del objeto en un lenguaje de representación que puede considerarse en ese momento redundante, toda vez que ese objeto ha sido expresado ya en otros lenguajes y el profesor juzga innecesario abundar en otra representación adicional.



Otra causa para el caso de un objeto no movilizado es que el sujeto encuentre una forma alternativa que es también correcta en ciertas condiciones y no se vea la necesidad de expresarlo en otra forma. Este fue el caso en lo que concierne a un importante objeto en el Cálculo, el concepto de *límite*. En la actividad 5 Erick accionó el manipulativo en el que es explícito que el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto de tangencia, es el límite de la secuencia del valor de la pendiente de una secante que pasa por el punto de tangencia y de un punto cada vez más cercano, y que se va acercando a un cierto valor. Esto no es visto así por Erick, y en vez de notar la tendencia explícita de la secuencia de valores, toma un punto muy cercano al de tangencia y calcula la pendiente entre ambos. Esto es correcto sólo en ciertas circunstancias, aunque no genera la importante noción del *límite de una secuencia*. De nuevo el profesor es quien podría rechazar la solución operativa de Erick y encauzarlo a la solución vía el límite de la secuencia. Una alternativa es crear otro manipulativo que presente un caso en el que la solución operativa sea inviable y se fuerce la solución por el límite.

Puede decirse que el *escenario de actividad* dispuesto ha mostrado ser eficaz para que Erick alcance el significado pragmático de los objetos matemáticos manejados. A la vez, los instrumentos de recolección de datos han permitido el registro del proceso microgenético en el que el sujeto logra aproximarse a dicho significado.

La secuencia de los manipulativos ha mostrado que al respetar la jerarquía o gradualidad de las habilidades necesarias para que Erick alcance el significado de los objetos matemáticos, se ha podido observar el proceso que Zandieh (2000), en la *teoría de la reificación*, o que Dubinsky y McDonald (2001) en la *teoría APOE* señalan: una acción convertida en proceso en un manipulativo, se convierte en un objeto necesario para poder

actuar junto con otros objetos y procesos en los manipulativos subsiguientes, *reificándose*, abreviándose y cambiando su estatus ontológico. La secuencia temporal de introducción de los objetos matemáticos ha provocado la reorganización de estos en nuevas estructuras concretas o agregadas, que son objetos más complejos, como lo demuestran las funciones semióticas logradas en la experiencia. En esto se nota igualmente el proceso semiótico en el que un signo generado en un cierto contexto, va volviéndose cada vez más abstracto para poder re-contextualizarse en nuevas situaciones.

Para distinguir un *concepto* de un *pseudo-concepto* como producto de la actividad, según la teoría vygotskiana, hay que hacer una adaptación a los conceptos matemáticos, ya que dicha teoría se refiere preferentemente al significado de signos lingüísticos y no a los matemáticos. Es necesario por tanto establecer un criterio de distinción que esté relacionado con la forma de los productos en esta tesis, que son las *funciones semióticas*. Los conceptos sólo son uno de los componentes del significado pragmático que deben estar relacionados con otros componentes justamente en tales *funciones semióticas*. De manera que si el presunto concepto está relacionado sólo con un lenguaje de representación, digamos con el lenguaje natural o el gráfico, y no está presente en una *proposición* o/y un *argumento*, entonces se considerará en esta tesis que se trata en realidad de un *pseudo-concepto*. Vygotsky diría que no está suficientemente relacionado en un sistema jerarquizado con otros conceptos y por lo tanto no es un concepto científico acabado.

### **VI.3 Sobre los supuestos**

El desempeño de Erick en el postest 3, efectuado 28 días después de la actividad inicial con los manipulativos, comprobó la generación de una función psicológica o de un

comportamiento controlado voluntariamente, realizado en forma consciente, que tuvo un origen social en la actividad con manipulativos virtuales cargados de signos culturales y de la interacción con un profesor, y mostrando el uso y mediación de herramientas y signos culturales. Estas características hacen que el comportamiento de Erick pueda calificarse de *superior* en el sentido que estableció Lev Vygotsky.

Las acciones *materiales* y *verbales* establecidas por Galperin, y las acciones intermedias propuestas en esta tesis, *material-verbal* y *perceptual-verbal*, todas referidas al sistema de prácticas culturales a propósito de los objetos matemático escogidos, mostraron ser efectivas para generar las *acciones mentales* necesarias para que Erick pudiera resolver los postest sin tener recurso a los manipulativos ni al lenguaje comunicativo.

Las interacciones discursivas de Erick y del profesor evidenciaron que los manipulativos por sí solos no pueden garantizar que el sujeto genere el significado pragmático institucional de los objetos matemáticos. Resulta necesaria la intervención del profesor para lograrlo, no sólo a nivel de una *tutoría* que ayude a la producción de respuestas o a la apropiación de procedimientos de control de la actividad cognitiva, sino de una verdadera *mediación* que negocia con el estudiante los cambios cognitivos, y tiene que ver con los significados, reglas, normas y convenciones institucionales a las que se trata de acercar al estudiante. El profesor es el representante de la sociedad y de la cultura en la actividad con el estudiante, además de la presencia del manipulativo que conlleva también una carga cultural. Sin su labor no puede garantizarse el proceso de *internalización* de las prácticas culturales relativas a la actividad matemática pretendida o esto se haría muy difícilmente, comprobando la afirmación de Vygotsky en lo que concierne a la importancia

que tiene un sujeto más capaz que el aprendiz para guiarlo en su *zona de desarrollo próximo*.

Por otro lado, al incorporar redes de objetos o de representaciones relacionadas, los manipulativos contribuyeron a que Erick volviera *concreto* lo que era originalmente inconexo al ligar entre sí a esos objetos en forma sistémica. Por el mismo hecho los manipulativos virtuales contribuyen a desarrollar el conocimiento científico del que habla Vygotsky, no aquel generado exclusivamente en la actividad científica, sino aquel que relaciona los objetos en redes jerarquizadas de ellos.

La acción de Erick con los manipulativos ha sido una acción humana social y significativa ejecutada directamente sobre los objetos mismos, no sobre sus representaciones lingüísticas, y ha sido mediada por instrumentos culturales, por lo que se puede decir que esa acción ha generado el conocimiento *de esos* objetos, no del discurso sobre ellos.

Esta investigación en el dominio *microgenético* ha permitido mostrar el origen y los cambios que sufre la *función psicológica superior* de resolución de problemas relativos a los objetos matemáticos que introducen la Derivada en un estudiante de bachillerato. Los instrumentos escogidos de recolección de datos y de análisis permitieron hacer una descripción densa de los cambios en Erick y permitieron ofrecer explicaciones de los mismos, que es el objetivo de esta tesis doctoral.

[\(A la tabla de contenidos\)](#)

## VII . Glosario

**Actividad:** respuesta a una necesidad que tiene un motivo material o psicológico de carácter social, que es causa de la conducta y que es mediada por instrumentos materiales y psicológicos. Relaciona los fenómenos sociales-institucionales con los psicológicos.

**Acción:** forma de concreción de la actividad, misma que puede cumplirse a través de acciones diferentes. Es un proceso subordinado a un objetivo consciente de tipo individual pero está mediada por instrumentos culturales. La acción es un nivel de análisis de la actividad, y surge como respuesta a una tarea y es orientada por el motivo de la actividad.

**Acción mental:** ejecución exclusivamente humana sobre un objeto que se lleva a cabo sin la presencia física de este. Es la abreviación y generalización de una acción material y verbal, todas referidas al mismo objeto.

**Artefacto:** objeto material o simbólico que ha sido construido según conocimientos específicos y tiene objetivos definidos. Son organizaciones invariantes intencionales diseñadas para operar transformaciones en el ámbito humano o material activadas por una persona.

**Derivada de una función:** razón de cambio instantánea de una variable dependiente respecto a otra independiente cuando el cambio de esta última tiende a cero. Si la razón de cambio existe es un número.

**Escenario de actividad:** en esta tesis es sinónimo de tarea. Comprende la ejecución de una *acción* realizada por un *agente* que utiliza unos medios o *agencia* y tiene un *propósito*.

**Función semiótica:** relación expresión-contenido entre dos o más componentes del significado de un objeto de estudio. Por ejemplo, entre la gráfica y la expresión simbólica de una función, o entre la definición de unos conceptos, un argumento de validación y una situación-problema.

**Instrumento:** recurso artificial de naturaleza social que controla la acción del hombre con el mundo o la cognición y la conducta, dependiendo si se trata de un instrumento material o de uno psicológico.

**Instrumento de mediación semiótica:** instrumento que es usado como medio de comunicación entre los significados del profesor y los estudiantes.

**Interacción** (con la computadora): en el contexto de esta tesis, se refiere al estudiante comunicándose con los recursos visuales de los manipulativos virtuales a través de una interfaz humano-máquina, lo cual sucede en un espacio-tiempo continuo y tiene dos fases: el humano actuando sobre la máquina, y la máquina respondiendo o reaccionando dando lugar a la interpretación humana.

**Interactividad:** sensaciones, formas, propiedades, cualidades y dimensiones de la interacción.

**Internalización:** forma específicamente humana de aprender nuevas acciones desde formas materiales hasta formas mentales abreviadas de acción. Transformación de una herramienta

en signo. Ejecución del sujeto en una situación problemática que es independiente de la presencia física de los elementos del problema.

**Manipulativo virtual:** representación visual interactiva de un objeto dinámico que presenta una oportunidad para construir conocimiento matemático, por lo general en la Web.

**Mediación** (del profesor): rol intermediario que ejerce el profesor situándose entre el estudiante y el saber científico. Co-construcción de un conocimiento por negociación.

**Mediación semiótica:** apropiación y uso de signos, como una faceta del desarrollo psicológico, que actúan como una herramienta abstracta que modifica el comportamiento humano más allá del desarrollo biológico, y que facilita los procesos de pensamiento, la solución de problemas, la comprensión y la interacción social.

**Microgénesis:** dominio temporal de estudio enfocado en la formación a muy corto plazo de un proceso psicológico específico.

**Objeto matemático:** todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas. Los tipos de objetos matemáticos son: lenguajes de representación, conceptos, algoritmos, problemas, proposiciones y argumentos.

**Semiosis:** proceso en el que algo se torna signo para alguien. Aprehensión o producción de una representación semiótica. Atribución de significado a un signo.

**Significado de un objeto matemático:** sistema de prácticas culturales discursivas y operativas a propósito del objeto. Los componentes del significado suelen ser: los lenguajes

de representación, una situación problemática, los conceptos y definiciones relativos al problema, los algoritmos relacionados al objeto, el conjunto de proposiciones que se plantean entre los conceptos y definiciones, y los argumentos de validación.

**Significado institucional de referencia:** sistema de prácticas discursivas y operativas de la comunidad matemática a propósito de un objeto matemático de estudio. Se puede expresar como un conjunto de funciones semióticas.

**Significado local pretendido:** sistema de prácticas discursivas y operativas de la escuela o sistema local a propósito de un objeto matemático de estudio. Se puede expresar como un conjunto de funciones semióticas.

**Significado personal:** sistema de prácticas discursivas y operativas de un sujeto a propósito de un objeto matemático de estudio o interés. Se puede expresar como un conjunto de funciones semióticas.

**Signo:** objetivación de un aspecto de la realidad al cual representa. Objeto, fenómeno o acción material que por naturaleza o convención, representa o sustituye a otro.

**Tarea:** en esta tesis es un sinónimo de escenario de actividad.

**Tutoría:** intervención del profesor sobre el alumno para hacerlo actuar y aprender. El tutor enrola al alumno en la tarea, focaliza su atención y le da información sobre sus errores.

**Uso funcional de un signo:** medio de dirigir la atención, de diferenciar y captar las características, de abstraer y de hacer una síntesis relativa al significado del signo. Se



traduce en manipulaciones, imitaciones, asociaciones y seguimiento de plantillas concernientes al signo.

[\(A la tabla de contenidos\)](#)

### VIII. Referencias

Adler, M. (1982). *Cómo leer ciencia y matemáticas*. México: Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Arievitch, I. (2003). A Potential for an Integrated View of Development and Learning: Galperin's Contribution to Histórico-cultural Psychology. *Mind, Culture and Activity*. 10(4), 278-288.

Arievitch, I. y Haenen, J. (2005). Connecting sociocultural Theory and Educational Practice: Galperin's Approach. *Educational Psychologist*, 40(3), 155–165. *Lawrence Erlbaum Associates, Inc.*

Arievitch, I. y Stetsenko, A. (2000). The Quality of Cultural Tools and Cognitive Development: Gal'perin's Perspective and Its Implications. *Human Development*, 43, 69–92.

Arievitch, I. y van der Veer R. (1995). Furthering the Internalization Debate: Gal'perin's Contribution. *Human Development*, 38, 113-126.

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática. ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación matemática*, 16(003), 5-28.

México Distrito Federal: Santillana.

Artigue, M, et al. (2006). Methodological tools for comparison of learning theories in technology enhanced learning in mathematics. *Network of Excellence Kaleidoscope, (contract NoE IST-507838). Proyecto TELMA: Technology Enhanced Learning in Mathematics.*

Bakker, A., Hoyles, C., Kent, P., Noss, R. (2006). Improving work processes by making the invisible visible. *Journal of Education and Work*, 19(4), September 2006. 343–361.

Bartolini B., Maria G.; Boni, Mara; Ferri, Franca; Garuti, Rossella. (1999). Early approach to theoretical thinking: gears in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1-3), 67-87.

Béguin P. Rabardel P. (2000). Designing for instrumented-mediated activity. *Scandinavian Journal of Information Systems*, 12, 173-190.

Berger, M. (2004). The functional use of a mathematical sign. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 81-102, *Kluwer Academic Publishers, Netherlands.*

Berger, M. (2005). Vygotsky's Theory Of Concept Formation And Mathematics Education. *Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 153-160. Melbourne: PME.*

Berger, M. (2006). Making mathematical meaning: from preconcepts to pseudoconcepts to concepts. *Pythagoras* 63, 14-21.

Bermúdez, R. y Rodríguez, M. (2001). Principio de Interiorización: ¿Dialéctica de lo externo y lo interno? En *Revista Cubana de Psicología*, 18(1).

Bessot, A. (2003). Une introduction à la théorie des situations didactiques. *Les cahiers du laboratoire Leibniz*. Recuperado en <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/07/87/94/PDF/CLLeib91.pdf>

Bezuidenhout, J. (1998). First-year university student's understanding of rate of change. *International Journal of Mathematical Education*, 29,(3), 389-399.

Bloch, I., Schneider, M. (2004). A various milieu for the concept of the limit-from determination of magnitudes to a graphic milieu allowing the proof. *ICTM*, 10.

Bosch, M. (Eds.). (2006). *Proceedings of CERME 4. IQS Fundemi Business Institute. Sant Feliu de Guixols, España.*

Bosch, M., Gascón, J. (2003). La Praxeología Local como Unidad de Análisis de los Procesos Didácticos. *Presentado en la 12e École d'Été de didactique des mathématiques celebrada en Corps (Francia).*

Bouniaev, M. (1996). Some Psychological Aspects of Developing Computer Based Instruction in Undergraduate Advanced Mathematics. *Joint Meetings in Orlando, Florida*. Recuperado en <http://mathforum.org/orlando/bouniaev/bouniaev-1.html>

- Braz Dias, A. L. (1999). Overcoming algebraic and graphical difficulties. *Proceedings of the International Conference of Adults Learning Mathematics*.
- Brushlinskii A.V. (2004). The Activity Approach and Psychology. *Journal of Russian and East European Psychology*, 42(2), 69–81.
- Brousseau, G. (1997a). La théorie des situations didactiques. *Curso dado en la atribución del Doctorado Honoris Causa de la Universidad de Montreal. Canadá*.  
Recuperado en [http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/TDS\\_Montreal.pdf](http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf) .
- Burke, K. (1969). A grammar of motives. Berkeley: University of California Press.
- Butto Z. C., Delgado J. y Zamora, J. (2003). La hoja de cálculo como herramienta didáctica. *Educación Matemática*, 15(003), 141-160.
- Calais, G. J. (2008). Employing Siegler’s Overlapping Waves Theory to Gauge . Learning in a Balanced Reading Instruction Framework. *Focus on Colleges, Universities, and Schools*, 2(1). Recuperado en <http://www.nationalforum.com/ElectronicJournalVolumes/CalaisGeraldEmployingSieglersOverlappingWavesTheory.pdf>
- Cheshire, A., Muldoon, K., Francis, B., Lewis, C., y Ball, L. (2007). Modelling change: New opportunities in the analysis of microgenetic data. *Infant and Child Development*, 16, 119–134. Wiley InterScience.

- Chetland, E., Fluck, M. (2007). Children's performance on the 'give x' task: A microgenetic analysis of 'counting' and 'grabbing' behaviour. *Infant and Child Development*, 16, 35–51. Wiley InterScience.
- Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. *Maury et Caillot, Rapport au savoir et didactiques, Editions Fabert, Paris*, 81-104.
- Chick, H. L., Vincent, J. L. (2005). Proceedings Of The 29<sup>th</sup> Conference Of The International Group For Psychology Of Mathematics Education. *PME 29, 1, 2, 3, 4. Melbourne. Australia.*
- Churchill, D. (2005). Learning objects: an interactive representation and a mediating tool in a learning activity. *Educational Media International*, 42(4), 333–349.
- Cisterna, F. (2005). Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. *Theoria*, 14 (1), 61-71.
- Clements, D. H. (1999). Concrete manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 1(1), 45-60. Recuperado en <http://www.triangle.co.uk/ciec/>
- Cole, M. (1997). La psicología socio-cultural-histórica: algunos comentarios generales y una propuesta para una nueva metodología genético-cultural. En J. Wertsch, P. del Río y A. Álvarez (Eds.). *La mente histórico-cultural. Aproximaciones teóricas y aplicadas. Pp. 145-164. Madrid: Fundación Infancia y Aprendizaje.*

Committee on Developments in the Science of Learning. (2003). *How People Learn. Brain, Mind, Experience, and School. John D. Bransford, Ann L. Brown, and Rodney R. Cocking, editors.*

Contreras, A. y Font, V. (2002). ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica? *XVIII JORNADAS DEL SI-IDM. Castellón. España.*

Contreras, A., Font, V., Luque, L., Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 25(2), 151-186.*

D'Amore, B y Godino, J. (2007). El enfoque onto-semiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en la didáctica de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10(002), 191-218. Distrito Federal, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.*

Davydov, V. V. (1972/1990). *Soviet studies in mathematics education: Vol. 2. Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula (J. Kilpatrick, Ed., & J. Teller, Trans.). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. (Trabajo original publicado en ruso en 1972).*

De la Mata, M. (1998). Enfoques de psicología cultural: tres aproximaciones al estudio de la relación entre cultura y pensamiento. *I Jornadas de Psicología del pensamiento. Universidad de Compostela, 361-373.*

Diriwächter, R., Valsiner, J. (2005). Qualitative Developmental Research Methods in their Historical and Epistemological Contexts. *Forum Qualitative Sozialforschung /*

*Forum: Qualitative Social Research*, 7(1). Art 8. Recuperado en <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0114-fqs060189>.

Dubinsky, E. y McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergrad Mathematics *Education Research*. D. Holton et. (Eds.). *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, 273-280.

Durmus, S. y Karakirik, E. (2006). Virtual manipulatives in mathematics education: a theoretical framework. En *The Turkish Online Journal of Educational Technology – TOJET January 2006*, 5(1).

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in Mathematical thinking. Basic issues for learning. *Memorias del PME-21*.

Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. *Proceedings of the 24th International Conference of Psychology of Mathematics Education*, 1, 59–69. Hiroshima, Japan.

Duval, R. (2003). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales. Recuperado en [http://ima.ucv.cl/lconsigliere/archivos/didactica\\_de\\_las\\_funciones\\_2003/Semiosis.doc](http://ima.ucv.cl/lconsigliere/archivos/didactica_de_las_funciones_2003/Semiosis.doc).

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131. Springer.

Edwards, C.H., Penney, D. (1987). *Cálculo y Geometría Analítica. Segunda edición.*  
*Prentice-Hall-Hispanoamericana. México.*

Elizondo, J. (2003). *Signo en acción. El origen común de la semiótica y el pragmatismo.*  
*Universidad Iberoamericana Cd. de México.*

Elliot, J. (1990) *La investigación-acción en educación.* Madrid. Morata.

Ernest, P. (1994). What is social constructivism in the psychology of mathematics education? *Proceedings of the 18th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lisbon, Portugal: University of Lisbon, 1994, 2, 304-311.*

Estrada-Medina, J. y Arenas-Sánchez, E. (2006). Understanding the Relation Between Accumulation and its Rate of Change in a Computational Environment Through Simulation of Dynamic Situations. *PME-NA Proceedings, 2-850.*

Evertson, C. y Green, J. (1989). Extraído de: *La observación como indagación y método.* En Wittrock, Merlin C. (compilador). *La investigación de la enseñanza, II. Métodos cualitativos y de observación. Paidós Educador: España.* Recuperado en [http://www.ipes.anep.edu.uy/documentos/curso\\_dir\\_07/practica/observa.pdf](http://www.ipes.anep.edu.uy/documentos/curso_dir_07/practica/observa.pdf)

Faerna, A. M. (1996). *Introducción a la teoría pragmatista del conocimiento.* Madrid: Siglo XXI.



- Falcade, R. (2003). Instruments de médiation sémiotique dans Cabri pour la notion de fonction. *ITEM Conference, Reims, France*. Recuperado en <http://edutice.archives-ouvertes.fr/docs/00/05/43/23/PDF/co66th1.pdf>
- Falcade, R. (2006). Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction. *Tesis Doctoral. Université Joseph Fourier (Francia) y Università Degli Studi Di Torino (Italia)*.
- Flick, U. (2007). *Diseño de investigación. Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid. Morata.
- Flynn, E., Pine, K., y Lewis, Ch. (2007). Using the Microgenetic Method to Investigate Cognitive Development: An Introduction. *Infant and Child Development, 16*, 1-6. Wiley InterScience.
- Flynn, E., Siegler R. (2007). Measuring Change: Current Trends and Future Directions in Microgenetic Research. *Infant and Child Development, 16*, 135-149.
- Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en didáctica de las matemáticas. *Revista EMA, 7(2)*, 127-170.
- Freire, P. (2004). *Pedagogía de la autonomía*. Madrid: Siglo XXI.
- Gagatsis, A., Elia, I., Mousoulides, N. (2006). Are registers of representations and problem solving processes of functions compartmentalized in student's thinking? *Revista*

*Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial, 197-224.

- Gillespie, A. y Zittoun, T. (2009). Using resources: Conceptualizing the mediation and reflective use of tools and signs. Recuperado en [http://www.psychology.stir.ac.uk/staff/agillespie/documents/GillespieZittoun\\_Using\\_resources\\_preproof.pdf](http://www.psychology.stir.ac.uk/staff/agillespie/documents/GillespieZittoun_Using_resources_preproof.pdf)
- Giraldo V., Tall, D. O., Carvalho, L. M. (2003). Using Theoretical Computational Conflicts to Enrich the Concept Image of Derivative. *Research in Mathematics Education*, 5, 63–78.
- Godino, J. D. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada*  
*Distribución en Internet: <http://www.ugr.es/local/jgodino/>*
- Godino, J. D., Contreras, Á., Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática. *En Recherches en Didactique des Mathématiques*.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2006). The onto-Semiotic approach to research in Mathematics Education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38.

- Gutiérrez, A., Boero, P. (eds). (2006). Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: past, present and future. *PME 30. Sense Publishers.*
- Gutiérrez, C. (2008). La enseñanza y la investigación. Una relación necesaria. *Medicina Universitaria* 10(41). 238-47. Guzmán, M. (1997). Matemáticas y sociedad. Acortando distancias. *Recuperado en*  
*<http://www.galileodidacticos.com/php/contenido.php?clave=sociales&ciudad=1>*
- Halliday, M.A.K. (1982). El lenguaje como semiótica social. La interpretación social del lenguaje y el significado. Fondo de Cultura Económica. México.
- Hauger, G. (1997). Growth of knowledge of rate in four preCalculus students. *Annual Meeting of de American Educational Research Association. Chicago IL.*
- Hauger, G. (2000). Instantaneous rate of change: a numerical approach. *International Journal of Mathematical Education, 31(6), 891-897.*
- Haywood, C. y Lidz, C. (2006). Dynamic Assessment in Practice. Clinical and Educational Applications. Cambridge University Press.
- Huberman, A. M., Miles, M.B. (2002). Métodos para el manejo y el análisis de datos. En *Por los rincones. Antología de métodos cualitativos en la investigación social. Catalina H. Denman y Jesús Armando Haro, compiladores. 1ª edición. Colegio de Sonora. 1ª reimpresión, Universidad de Guadalajara.*

- Ilyenkov, E.V. (2007). A Contribution on the Question of the Concept of “Activity” and Its Significance for Pedagogy. *Journal of Russian and East European Psychology*, 45(4), 69–74.
- Ivic, I. (1999). Lev Semionovich Vygotsky (1896-1934). En *Perspectivas*. Unesco. Oficina Internacional de Educación. Vol. XXIV(3-4). Pp. 773-799.
- John-Steiner, V., Mahn, H. 1996. Histórico-cultural Approaches to Learning and Development: A Vygotskian Framework. *Educational Psychologist*, 31, 191-206.
- Karpov, Y. V., Bransford, J. D. (1995). L. S. Vygotsky and the Doctrine of Empirical and Theoretical Learning. *Educational Psychologist*, 30(2), 61-66.
- Kline, M. (1998). Matemáticas para los estudiantes de humanidades. Fondo de Cultura Económica. México.
- Koshmanova, T. S. (2007). Vygotskian Scholars. Visions and Implementation of Cultural-Historical Theory. *Journal of Russian and East European Psychology*, 45(2).
- Kozulin, A. (1999). Histórico-cultural Contexts of Cognitive Theory. *Human Development*, 42, 78–82.
- Kosulin, A., Presseisen, B.Z. (1995). Mediated learning experience and psychological tools : Vygotsky’s and Feuerstein’s perspectives in a study of student learning. *Educational Psychologist*, 30 (2), 67-75. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

- Kuo, C. C., Chang, L. W. y Wang, M. N. (2002). A Study on Assessing the Learning Potentials of Culturally Diverse Students. *7th Conference on Giftedness Asia-Pacífico. 12 al 16 de agosto de 2002. Bangkok, Tailandia.*
- Kuutti, K. (1991). The concept of activity as a basic unit of analysis for CSCW research. Proceedings of the Second European Conference on Computer-Supported Cooperative Work. *Bannon, L., Robinson, M. y Schmidt, K. (Editores).*
- Labarrere-Sarduy, A. (2000). Aprendizaje para el desarrollo. *Revista Cubana de Psicología, 17(1), 28-30.*
- Lagrange J. B. (2005). Curriculum, classroom practices and tool design in the learning of functions through technology-aided experimental approaches. *International Journal of Computers for Mathematical Learning. Kluwer Academic Publishers.*
- Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B. (2006). Cálculo con Geometría Analítica. *Octava edición. McGraw-Hill/Interamericana Editores. México.*
- Lavelli, M., Pantoja, A. P. F., Hsu, H., Messinger, D., y Fogel, A. (2005). Using microgenetic designs to study change processes. *D. M. Teti (Ed.), Handbook of research methods in developmental science, 40-65. Blackwell Publishing.*
- Lazarev, V.S. (2004). The Crisis of “the Activity Approach” in Psychology and Possible Ways to Overcome It. En *Journal of Russian and East European Psychology, 42(3), 35-58.*
- Leontiev, A.N. (1978). *Activity, Consciousness, and Personality.* Prentice-Hall.

- Leontiev, A.A. (2006). Units and Levels of Activity. *Journal of Russian and East European Psychology*, 44(3).
- Lory, J. (2002). Programme Numérisation pour l'Enseignement et la Recherche. Recuperado de internet en 10 de septiembre de 2009 en la dirección <http://edutice.archives-ouvertes.fr/docs/00/00/18/58/PDF/SynthesePNER.pdf> .
- Magnani, L. Dossena, R. (2005). Perceiving the infinite and infinitesimal world: unveiling and optical diagrams in Mathematics. *Foundation of science*, 10, 7-23. Springer.
- Mariotti, M. A. (2002). Influence of technologies advances in students' math learning. *Handbook of International Research in Mathematics Education*, cap. 29, 757-786. Editado por L. D. English. Lawrence Erlbaum Associates publishers, Mahwah, New Jersey.
- Martínez, M. (1999). El enfoque histórico-cultural en el estudio del desarrollo y la educación. *Revista electrónica de investigación educativa*, 1 (1). Recuperado en <http://redie.uabc.mx/vol1no1/contenido-mtzrod.html>
- Maschietto, M. (2004). The introduction of calculus in 12th grade: The role of artefacts. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 273–280.
- Maschietto, M, Bartolini B, Maria G. (2005). Meaning Construction Through Semiotic Means: The Case Of The Visual Pyramid. En Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 313-320. Melbourne: PME.

- Matawa, C. (1998). Uses of Java applets in mathematics education. *Asian Technology Conference in Mathematics, Tsukuba, Japón*. Recuperado en <http://www.atcminc.com/mPublications/EP/EPATCM98/ATCMP016/paper.pdf>
- Maxwell, J. A. (2004). Using Qualitative Methods for Causal Explanation. *Field Methods*, 16(3), 243–264. *Sage Publications*.
- McKernan, J. (1999). Investigación-acción y currículum. Métodos y recursos para profesionales reflexivos. Ediciones Morata. Madrid.
- Merenluoto, K., Lehtinen, E. (2000). Do theories of conceptual change explain the difficulties in enlarging the number concept in mathematical learning? *Annual meeting of the American Educational Research Association. New Orleans. Louisiana*.
- Morge, L. (2000). Former les enseignants a interagir avec les élèves en classe de sciences. *Recherche et Formation*. No. 34, 101-112. IUFM de Clermont-Ferrand, UREST, INRP.
- Mortimer, E. (2000). Microgenetic analysis and the dynamic of explanations in science classroom. *III Conferencia de Pesquisa Socio-cultural. Sao Paulo. Brasil*. Recuperado en [www.fae.unicamp.br/br2000/trabs/1990.doc](http://www.fae.unicamp.br/br2000/trabs/1990.doc)
- Moyer, P. S., Bolyard, J. J., & Spikell, M. A. (2002). What are virtual manipulatives? [Online]. *Teaching Children Mathematics*, 8(6), 372-377. Recuperado en [http://my.nctm.org/eresources/article\\_summary.asp?URI=TCM2002-02-372a&from=B](http://my.nctm.org/eresources/article_summary.asp?URI=TCM2002-02-372a&from=B)

- Moyer-Packenham, P. S., Salkind, G., & Bolyard, J. J. (2008). Virtual manipulatives used by K-8 teachers for mathematics instruction: Considering mathematical, cognitive, and pedagogical fidelity. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 8(3), 202-218. Recuperado en [http://www.editlib.org/index.cfm?fuseaction=Reader.ViewFullText&paper\\_id=26057](http://www.editlib.org/index.cfm?fuseaction=Reader.ViewFullText&paper_id=26057)
- Muhr, T. (2004). Atlas.ti. The Knowledge Workbench. V5.0. User's Guide and Reference.
- Naidoo, K. y Naidoo, R. (2007). Students Understanding of the Derivative in Blended Learning Environment: Teaching Calculus in a Blended Learning Environment. *International Journal of Learning*, 14(4), 193-202.
- Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M., Stehlíková, Naďa. (Eds). (2006). *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME 30.*
- OCDE. (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework, Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Recuperado en internet en la dirección <http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/46/14/33694881.pdf>
- Ortíz, G. y Chávez, S. (2008). La teoría de la actividad en la enseñanza. *Revista Caminos Abiertos*, 174. Universidad Pedagógica Nacional. México.
- Otte, M.(2001). Mathematical epistemology from a semiotic point of view. *Artículo presentado en el Congreso PME 25. Utrecht. Holanda.*



- Ozmantar, M. y Monaghan, J. (2007). A Dialectical Approach to the Formation of Mathematical Abstractions. *Mathematics Education Research Journal*, 19(2), 89–112.
- Pantazi, D., Philippou, G. (2007). Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Larnaca. Chipre.
- Prediger, S., Bikner-Ahsbals, A., Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches. First steps towards a conceptual framework. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 39.
- Rabardel P. (1995). Les hommes & les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains. *Paris. France. Armand Colin.*
- Rabardel, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Bailleul Marc, Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques, Évolution des enseignants de mathématiques; rôle des instruments informatiques et de l'écrit. Qu'apportent les recherches en didactique des mathématiques*, 203-213. ARDM . Caen.
- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 237-268.
- Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70.

- Radford, L. (2008a). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*, 40, 317–327.
- Radford, L. (2008b). Theories in Mathematics Education: A Brief Inquiry into their Conceptual Differences. *Documento de trabajo. Preparado para el ICMI. Equipo 7. Tema: La noción y el rol de la teoría en la investigación de la educación matemática.*
- Richard, P. (2004). L'inference figurale: un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational studies in mathematics*, 57, 229–263. *Kluwer academic publishers. Netherlands.*
- Rockwell, E. (1987). Reflexiones sobre el proceso etnográfico. *Rockwell y Ezpeleta (coords.). La práctica docente y sus contextos institucional y social – Informe Final. México: DIE.*
- Rambusch, J. (2006). Situated learning and Galperin's notion of object-oriented activity. *R. Sun (Ed.). Proceedings of the 28th Annual Conference of the Cognitive Science Society. 1998-2003.*
- Ramírez, J.D., Cubero, M. y Santamaría, A. (1990). Cambio sociocognitivo y organización de las acciones: una aproximación histórico-cultural a la educación de adultos. *Infancia y aprendizaje*, 51-52, 169-190.
- Salas, S., Hille, E., Etgen, G. (2002). Calculus. Una y varias variables. *Cuarta edición. Barcelona. España.*

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. *D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, 334-370. New York: MacMillan.

Schön, Donald A. (1987) La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones. Barcelona: Paidós-Ministerio DE Educación y Ciencia.

Schunk, D. (1997). Teorías del Aprendizaje. *Prentice Hall. México.*

Schwank, I. (1999). European Research In Mathematics Education. *Proceedings Of The First Conference Of European Society In Mathematics Education. Vol. 1, 2 y 3. Osnabruck.*

Sedig, K y Liang Hai-Ning. (2006). Interactivity of Visual Mathematical Representations: Factors Affecting Learning and Cognitive Processes. *Jl. of Interactive Learning Research*, 17(2), 179-212.

Seng Seok-Hoon, A., Hwee Kheng, L., y Jensen, M. (2005). Towards an Effective Dynamic Model of Assessment and Learning: A New Pedagogical Idea for the Classroom Teacher. *CRPP 2005 workshop paper*. Recuperado en <http://conference.nie.edu.sg/paper/Converted%20Pdf/ab00264.pdf>

Siegler, R. and Crowley, K. (1991). The Microgenetic Method. *American Psychologist*, 46 (6), 606-620.

- Siegler, R. S. y Svetina, M. (2002). A Microgenetic/Cross-Sectional Study of Matrix Completion: Comparing Short-Term and Long-Term Change. *Child Development*, May/June 2002, 73(3), 793–809.
- Sisto, V. (2008). La investigación como una aventura de producción dialógica: La relación con el otro y los criterios de validación en la metodología cualitativa contemporánea. *Psicoperspectivas*, VII, 114-136. Recuperado el 23 de octubre de 2010 en la dirección electrónica <http://www.psicoperspectivas.cl>
- Shannon, P. (1983), *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Nueva York. Basic.
- Stake, R. (1998). Investigación con estudio de casos. *Ediciones Morata. España*.
- Subbotsky, E. (1998). Vygotsky's Distinction Between Lower and Higher Mental Functions and Recent Studies on Infant Cognitive Development. Consultado en Internet el 15 de noviembre de 2010 en la dirección electrónica <http://psych.hanover.edu/vygotsky/subbot.html>
- Susi, T., Ziemke, T. (2001). Social cognition, artifacts and stigmergy: A comparative analysis of theoretical frameworks for the understanding of artifact-mediated collaborative activity. *Journal of Cognitive Systems Research*, 2, 273-290.
- Schwarz, B., Dreyfus, T. and Hershkowitz, R. (2004). Teacher guidance of knowledge construction. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol 4, 169–176*.

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the Learning of Calculus and Analysis. En *Focus*, 12 (3 y 4), 49–63.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 151-169.

Tharp, R., Gallimore, R. (1988). Rousing minds to life. Cambridge University Press.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación de matemática educativa a nivel superior. *Educación matemática*, 17(1), 5-3. Santillana. México.

Trouche L. (2005). Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques. *Actes de l'Université d'été de Saint-Flour. Le calcul sous toutes ses formes*.

Tunteler, E., Resing, W. (2007). Change in spontaneous analogical transfer over time in young children: A microgenetic study. *Infant and Child Development*, 16, 71–94.

Valero, P. (2007). Investigación socio-política en educación matemática: Raíces, tendencias y perspectivas. *Universidad de Aalborg, Dinamarca*.

Valsiner, J. (2001). Process Structure of Semiotic Mediation in Human Development. *Human Development*, 44, 84–97.

van der Heijden, M. (1994). A Holistic Vygotskian Operational Definition Of Approach Behavior For The Study Of Personality And Learning. *Recuperado en*  
<http://psych.hanover.edu/vygotsky/heijden.html>

- van Dijk, M. y van Geert, P. (2007). Wobbles, humps and sudden jumps: A case study of continuity, discontinuity and variability in early language development. *Infant and Child Development*, 16, 1-6. Wiley InterScience.
- van Erp, J.W.M. y Heshusius, L. (1986). Action Psychology: Learning as the Interiorization of Action in Early Instruction of Mathematical Disabled Learners. *Journal of Learning Disabilities*, 19 (5), 274.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10 (2, 3), 33-170.
- Vérillon, P., Andreucci, C. (2005). Artefacts and cognitive development: how do psychogenetic theories of intelligence help in understanding the influence of technical environments on the development of thought? *International Handbook of Technology Education*.
- Vygotsky, L. S. (2001). Pensamiento y lenguaje. *En Obras Escogidas Vol.II. Problemas de Psicología general. 2ª ed. A. Machado Libros. España.*
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Editado por Cole, Michael., Steiner, V. J., Scribner, S., Souberman, E. (Eds). Harvard University Press.
- Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Paidós.
- Wertsch, J. (1993). *Voces de la Mente. Un enfoque histórico-cultural para el estudio de la Acción Mediada*. Visor. Madrid. España.

Wertsch, J. (1997). La necesidad de la acción en la investigación histórico-cultural. En J.

Wertsch, P. del Río y A. Álvarez (Eds.). *La mente histórico-cultural.*

*Aproximaciones teóricas y aplicadas.* 49-62. Madrid: Fundación Infancia y Aprendizaje.

Wertsch, J., Del Río, P. y Álvarez, A. (1997). Estudios histórico-culturales: historia, acción

y mediación. En *La Mente Histórico-cultural. Aproximaciones teóricas y aplicadas.*

*Fundación Infancia Aprendizaje.*

Wertsch, J. y Penuel, W. (1995). Vygotsky and Identity Formation: A Histórico-cultural

Approach. *Educational Psychologist.* 30(2). 83-92.

Winslow, C. (2003). Semiotic and discursive variables in CAS-based didactical

engineering. *Educational Studies in Mathematics* 52. 271–288. 2003. Kluwer

Academic Publishers.

Wittmann Erich Ch. (2005). Mathematics as the Science of Patterns - A Guideline for

Developing Mathematics Education from Early Childhood to Adulthood.

*Conferencia plenaria presentada en el International Colloquium "Mathematical*

*Learning from Early Childhood to Adulthood", organizada por el Centre de*

*Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques en colaboración con el Institut*

*de Mathématique de l'Université de Mons-Hainaut, Mons/Bélgica.*

Xomskaya, E. (2002). La escuela neuropsicológica de A. R. Luria. *Revista Española de*

*Neuropsicología.* 4(2-3), 130-150.

Zinchenko, P.I. (1937/1983). The Problem of Involuntary Memory. *Soviet Psychology*. Vol. 22. 55–111.

Zinchenko, V.P. (1997). La psicología histórico-cultural y la teoría psicológica de la actividad: revisión y proyección hacia el futuro. *J. Wertsch, P. del Río y A. Álvarez (Eds.). La mente histórico-cultural. Aproximaciones teóricas y aplicadas, 35-47. Madrid: Fundación Infancia y Aprendizaje.*

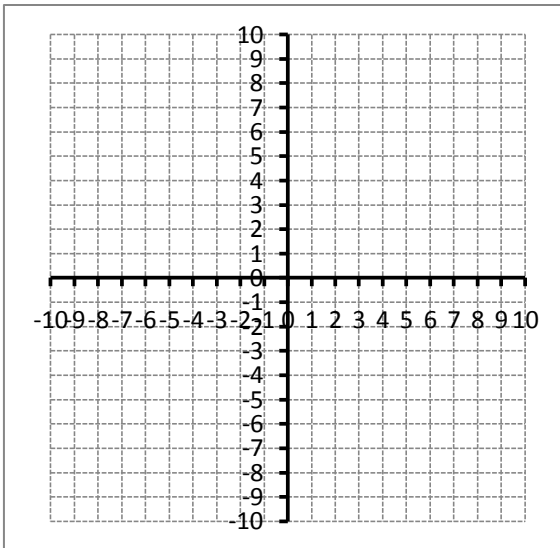
[\(A la tabla de contenidos\)](#)

## **IX . Anexos**

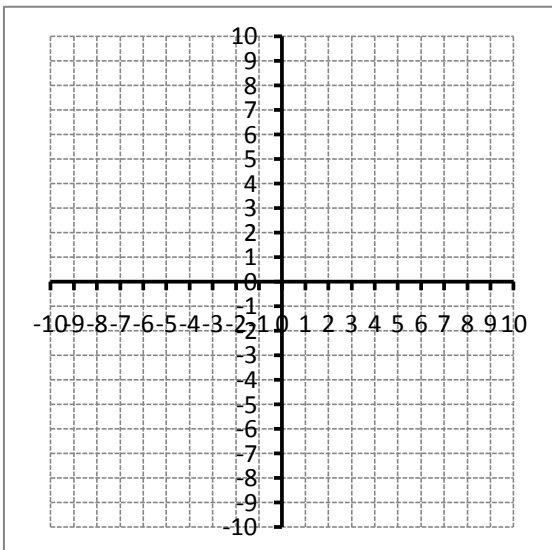
### **IX.1 Pretest general**

1. En el plano coordenado dibujar los puntos  $(-4, 7)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(7, -5)$  y junto a cada uno poner sus coordenadas.

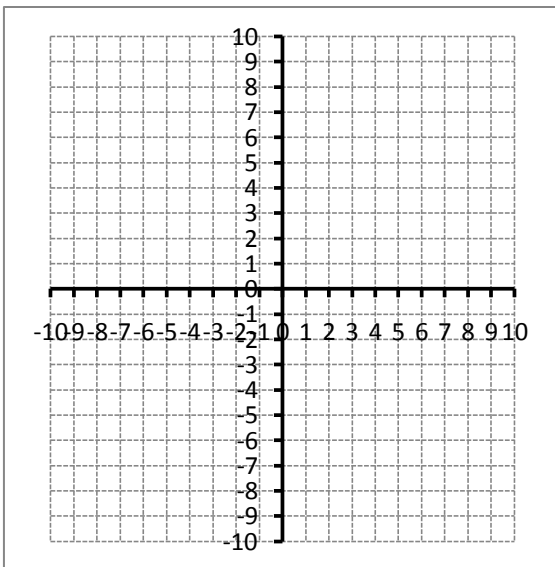




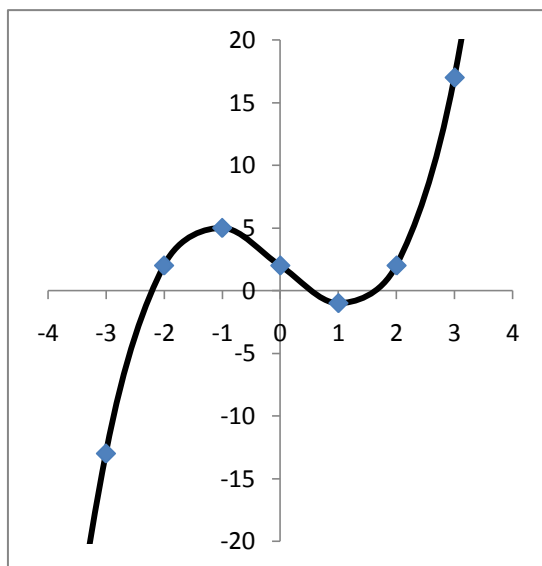
2. Trazar la gráfica de la ecuación  $y = 3x - 2$



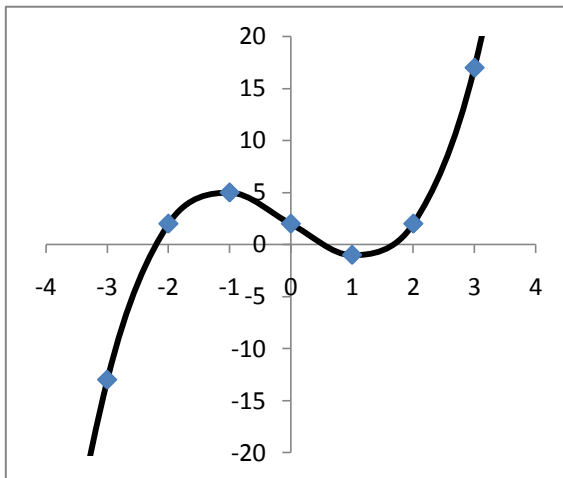
3. Trazar la gráfica de la ecuación  $y = 2x^2 - x + 1$



4. Trazar una recta tangente a la curva mostrada en el punto donde  $x = -1$



5. Trazar una recta secante a la curva mostrada que pase por los puntos donde  $x = -2$  y  $x = 1$



6. ¿Cuál es el significado del símbolo  $f(x)$  ?
7. ¿Cuál es el valor de la distancia entre los puntos  $(2, 4)$  y  $(2, -5)$  ?
8. ¿Cuál es el valor de la distancia entre los puntos  $(2, -4)$  y  $(-1, -4)$  ?
9. ¿Cuánto vale la pendiente del segmento recto que pasa por los puntos  $(-1, 2)$  y  $(4, -3)$  ?
10. ¿Qué operación matemática harías para saber cuántas veces es más grande 21.7 que 9.4 ?

## IX.2 Respuesta de Erick al pretest general

Erick ubica correctamente las coordenadas de puntos en el plano en la pregunta 1. Traza la gráfica de una ecuación lineal y otra cuadrática sin problemas en la pregunta 2 y 3. En la pregunta 4 no representa la recta tangente a la curva, quizá porque conoce que en una circunferencia el punto de tangencia corta a la curva en un solo punto de manera local, y en el ejemplo mostrado, la tangente debe cortar a la curva en otros puntos. En la pregunta 5 Erick representa en el plano la recta secante a la curva, pero no está seguro, lo hace sin convicción, dudando. Conoce el significado de la notación o símbolo de función,  $f(x)$  en la pregunta 6. Ante la pregunta 7 calcula la distancia entre puntos alineados horizontal o

verticalmente en el plano coordenado, pero lo hace graficando los puntos en el plano y contando las unidades de longitud, no aplicando una fórmula. En cuanto a la pendiente de un segmento recto a partir de sus coordenadas, pregunta 9, pone una fórmula, la recuerda parcialmente, pero está al revés numerador y denominador, y no opera correctamente con los signos. En la pregunta 10 sobre razón o proporción, muestra una idea que va en sentido correcto, aplica una división, pero están invertidos numerador y denominador.

### IX.3 Transcripción integral de la interacción con Erick

La *Tabla 17* consigna el diálogo integral entre el estudiante y el profesor en el escenario de actividad investigado.

<b>Manipulativo 0a</b>						
	<b>Texto de la transcripción</b>	<b>Grado de abstracción</b>	<b>Grado de generalización o amplitud</b>	<b>Grado de explicitación</b>	<b>Grado de independencia</b>	<b>Completez y claridad de la expresión</b>
P	<i>(El estudiante E y el profesor P están frente al manipulativo en la computadora. P invita a E a accionarlo). Como tu quieras, si quieres muévela con el mouse....si quieres muévela para ver qué pasa por ahí, ve qué está pasando....si quieres preguntar algo, o lo que tú quieras...o si no, lo terminas de mover y al momento de las preguntas ya respondes.</i>	Acción material			Mediación de orientación 2	
E	¿el punto rojo sólo es un punto que escoge al azar?	Acción material-verbal	Descripción perceptual			
P	si.....la primera pregunta que tu ya la demostraste por aquí es ¿cómo se calcula cada punto de la gráfica de esa función?				Mediación de orientación 1	
E	le das un valor a x y dependiendo de ese valor de x te da un valor para y griega.	Acción material-verbal	Explicación teórica	Caracterización		Media

P	ajá, aquí nada más, no sé si has usado esta notación, f de x				Mediación de orientación 2	
E	f de x, sí	Acción verbal	Descripción teórica			
P	es la y, algo que depende de x...bueno, entonces prácticamente lo has contestado...entonces ¿cómo se trazaría la gráfica de la función?				Mediación de orientación 2	
E	para trazar la gráfica de la función tienes que sacar...tienes que resolver la ecuación que tienes, la función, asignando un valor a x y, este..... obteniendo un valor de y, y con los dos valores que te dan te va a dar unas coordenadas que dibujas en la gráfica, y haciéndolo varias veces te da más o menos la trayectoria de la parábola.	Acción verbal	Explicación teórica	Definición		Media
P	ajá.....¿qué relación hay entre x y f(x)?				Mediación de orientación 2	
E	¿f de x es y griega? ...cuál es el valor de y griega dependiendo del valor de x	Acción verbal	Explicación teórica	Caracterización		Media
P	que depende.....entonces ¿cómo definirías lo que es una función?				Mediación de orientación 2	
E	una función es....es...una función...es una ecuación que puede variar de valores	Acción verbal	Descripción teórica	Caracterización		Baja
P	y digamos cómo están relacionados x y f(x), tu ya lo dijiste en el punto anterior				Mediación de orientación 2	
E	¿x y f(x)?...ah, que f(x) siempre va a cambiar dependiendo del valor de x	Acción verbal	Explicación teórica	Caracterización		Baja
P	entonces qué podrías definir...qué sería la gráfica de la función				Mediación de orientación 2	
E	una gráfica de la función es una representación de la función en que te puede servir para ver, dependiendo del valor de x o y griega, cuál es el valor del otro	Acción verbal	Generalización perceptual	Definición		Media
P	¿de cuantas formas está representada aquí la función? Porque hay varias formas				Mediación de orientación 2	

E	¿cómo de cuántas formas?	Acción verbal	Descripción perceptual			
P	digamos que hay tipos de representación de esa misma función				Mediación moderada 1	
E	áh, gráfica...	Acción material-verbal	Descripción perceptual	Ejemplificación		
P	bueno, la gráfica, ¿hay alguna otra?				Mediación de orientación 2	
E	está la ecuación o la numérica (las confunde)... y esta otra (señala la máquina) un diagrama	Acción material-verbal	Descripción perceptual	Interpretación		Baja
P	una máquina...áh si quieres ponte en esta segunda pestañita, es digamos otra manera de ver, si quieres mueve...				Mediación de orientación 1	
E	(E se adelanta, hace una conjetura, está metido en la discusión) ¿aquí es para resolverlo?	Acción material-verbal	Descripción perceptual			
P	no, aquí es para ver cómo funcionan las funciones...si quieres cambia (acciona la barra)... y pueden entrar no nada más números, pueden entrar símbolos también...si quieres muévele				Mediación de orientación 2	
E	aquí está una incógnita	Acción material-verbal	Descripción perceptual	Interpretación		
P	si quieres pásate a la siguiente ceja, esa (el test)...es una pequeña pruebita, a ver, contéstala.....puedes regresar, si algo dudas, puedes regresar a las anteriores				Mediación de orientación 1	
E	(Hay una pregunta que introduce un término que no se ha manejado en los manipulativos anteriores) ¿Máximo local?	Acción material-verbal				
E	(test en computadora)	Acción mental	Generalización teórica	Definición		Media
<b>Manipulativo 0b</b>						
	<b>Texto de la transcripción</b>	<b>Grado de abstracción</b>	<b>Grado de generalización o amplitud</b>	<b>Grado de explicitación</b>	<b>Grado de independencia</b>	<b>Grado de consciencia o despliegue</b>

P	muy bien...bueno, si quieres pasamos a la siguiente (manipulativo 0b)...esta (el E ya la acciona sin esperar instrucciones)...muévela..... la pregunta o el objetivo están aquí en la esquina, lee las preguntas directamente si tu quieres.....sencillamente es ¿qué relación hay entre este número (mtan) con cómo se comporta esa recta (tangente) y la curva...¿qué tiene que ver el valor y el signo?...el signo más bien	Acción material			Mediación de orientación 2	
E	la recta...de la recta es la inclinación, y de la curva.....	Acción material-verbal	Descripción perceptual	Interpretación		Baja
P	pero digamos qué tiene que ver el signo				Mediación de orientación 2	
E	el signo, si va hacia arriba o hacia abajo	Acción material-verbal	Explicación perceptual	Caracterización		Baja
P	ok				Mediación suave 1	
E	y este va más o menos ...como el promedio tal vez, no sé.....tal vez cuenta la diferencia entre un punto y el siguiente	Acción material-verbal	Descripción perceptual	No hay correspondencia		
P	ahí es negativo (un caso en el que el valor de mtan)				Mediación de orientación 2	
E	es negativo porque va hacia abajo	Acción perceptual-verbal	Descripción perceptual	Interpretación		Baja
P	¿la curva o la recta?				Mediación suave 1	
E	las dos	Acción material-verbal	Descripción perceptual	Interpretación		Baja
P	¿ahí? (hay m positiva) ¿crece o decrece?				Mediación de orientación 2	
E	aumenta (se lee de nuevo las instrucciones, el objetivo)	Acción material-verbal	Descripción perceptual	Interpretación		Baja
P	si por ejemplo te dijeran, en un punto de la gráfica la pendiente vale 0, ¿cómo sabrías se trata de				Mediación de orientación 2	

	un máximo o de un mínimo?.....porque resulta que, a ver ¿en dónde vale 0?					
E	aquí, aquí y aquí (señala en la gráfica)	Acción material-verbal	Descripción perceptual	Ejemplificación		Baja
P	algunos puntos son.... A y C son máximos y B es un mínimo local, un mínimo de esa zona ...si alguien te dijera, si yo te dijera en tal punto la pendiente de la tangente vale 0, ¿cómo sabrías si es máximo o mínimo ese punto?				Mediación de orientación 2	
E	¿sabiendo qué más?	Acción verbal	Descripción teórica	No hay correspondencia		
P	sólo sabiendo la pendiente				Mediación de orientación 1	
E	¿la pendiente 0?	Acción perceptual-verbal	Explicación teórica	Caracterización		
P	si, es lo único que sabemos.....en A la pendiente es 0, pero también en C y también en B. ¿cómo sabríamos si es un máximo o un mínimo lo que está ahí?				Mediación de orientación 2	
E	la pendiente 0					
P	¿qué otro dato habría que saber?				Mediación suave 1	
E	tendríamos que saber las coordenadas del punto	Acción perceptual-verbal	Explicación teórica	No hay correspondencia		Nivel 0
P	bueno, las coordenadas, pongamos que las conocemos: en tal punto la pendiente vale 0...a ver, muévete alrededor de A, ve el signo, ve los signos				Mediación moderada 1	
E	ah, ya se, sabiendo si el anterior va hacia arriba y el siguiente va hacia abajo	Acción material-verbal	Generalización teórica	Definición		Media
P	¿y en el B?				Mediación de orientación 2	
E	si el anterior va hacia abajo y el siguiente va hacia arriba	Acción perceptual-verbal	Generalización teórica	Definición		Media
P	eso más adelante en Cálculo es				Mediación de	



	una prueba. Hay una prueba numérica para saber eso, y eso lo podemos saber sin ver la gráfica. Muy bien, pues ya estamos con esto también.				orientación 2	
E	¿pongo la siguiente pestaña? (es el manipulativo 1)					
E	Postest en papel	Acción material-verbal	Generalización teórica	Definición		Media

## Manipulativo 1

	Texto de la transcripción	Grado de abstracción	Grado de generalización o amplitud	Grado de explicitación	Grado de independencia	Grado de consciencia o despliegue
P	a ver muévele tantito.....aquí se trata de que propongas una fórmula, acércate un papel, encuentra una fórmula que calcule la distancia conocidas las coodenadas.pro encuentra una fórmula general, una fórmula que funcione en todos los casos				Mediación de orientación 1	
E	ok					
P	es muy sencilla					
E	¿aquí es la distancia? (señala la distancia)					
P	si, la distancia que hay que calcular es la azul, D, pero tu en base a las coordenadas, los puntos				Mediación de orientación 2	
E	ah, la distancia se mide así y así ( )	Acción material-verbal	Descripción perceptual	No hay correspondencia		Baja
P	ahorita nosotros queremos la distancia horizontal entre estos dos puntos				Mediación de orientación 1	
E	ah, horizontal					
P	si, exclusivamente la horizontal....y en base, más bien, conociendo solamente las coordenadas ¿cómo podríamos calcular esta distancia?, y una fórmula que funcione donde quiera que estés (en el plano).				Mediación de orientación 2	
E	(propone una fórmula, funciona una vez pero no la segunda). No...	Acción material-verbal	Generalización perceptual	No hay correspondencia		

P	vamos a ver si funciona para cualquier otro caso, cuando...por ejemplo ahí				Mediación suave 1	
E	(sigue especulando, calcula un caso, no funciona)	Acción material-verbal	Explicación teórica	No hay correspondencia		
P	mueve, busca de otra manera.....a partir del 8 y del 3 cómo obtener 11,.....que funcione donde quiera que la pongas.....guíate con estas distancias (las ayudas del manipulativo).....(el E en el papel hace conjeturas)				Mediación de orientación 2	
E	"-X1 más X2"	Acción verbal	Generalización teórica	Definición		Media
P	¿cómo sería?				Mediación de orientación 2	
E	"-x1 + x2".....9 +3, 12.....5+9..14	Acción mental	Generalización teórica	Definición		Media
P	ya está, excelente..ahora hay que calcular esta (manipulativo 2)				Mediación de orientación 2	
<b>Manipulativo 2</b>						
	<b>Texto de la transcripción</b>	<b>Grado de abstracción</b>	<b>Grado de generalización o amplitud</b>	<b>Grado de explicitación</b>	<b>Grado de independencia</b>	<b>Grado de consciencia o despliegue</b>
E	"-y1 + y2"					
P	a ver si funciona en todos				Mediación suave 1	
E	"-6+3" ...da 3.....entonces sería "y1-y2".....6-3, 3..5+4.....-4...no, espera.....5+4, 9, si..4+4,8, 9+9, 18....6+7,13 y así va.	Acción material-verbal	Generalización teórica	Definición		Baja
P	a ver, ¿ahí también, están las dos negativas?				Mediación suave 1	
E	"-4+7, 3", si, ahí está..... si es "y1-y2".	Acción material-verbal	Generalización teórica	Definición		Media
P	ahora vamos a ver en el mapa cómo andamos, ya hicimos estos dos, distancia entre puntos alineados verticalmente, horizontalmente, ahora vamos con este (manipulativo 3), vamos				Mediación de orientación 2	

Manipulativo 3						
	Texto de la transcripción	Grado de abstracción	Grado de generalización o amplitud	Grado de explicitación	Grado de independencia	Grado de consciencia o despliegue
E	pendiente de una recta	Acción material				
P	pendiente de una recta (manipulativo 3), a ver, muévele tantito, esto ya lo tienes				Mediación de orientación 1	
E	más o menos...la pendiente aquí es (sobre un ejemplo) ¿1? (lo calcula E, no lo ve en el manipulativo; se ve que conoce el concepto)	Acción material-verbal	Descripción teórica	Ejemplificación		Baja
P	si.....¿cómo definirías la pendiente?.....si quieres muévele a otros casos, aquí por ejemplo el 10 es negativo, ¿porqué el -10 es negativo?				Mediación de orientación 2	
E	es negativo porque va de un punto más alto a uno bajo, y mayor a y menor	Acción material-verbal	Explicación perceptual	Caracterización		Media
P	ok..ahora cómo definirías la pendiente, una definición sencilla				Mediación de orientación 1	
E	como el ángulo de inclinación expresado.....unidades que sube por cada unidad de longitud....o...este, unidades de y por cada una de x	Acción material-verbal	Explicación teórica	Caracterización		Alta
P	ok, ahora..esa es la pendiente en el lado izquierdo.....aquí hay otra concepto medido que está relacionado, a ver, ¿cómo verías esto de razón media de cambio?				Mediación de orientación 1	
E	¿razón media de cambio? (se habla, pendiente y razón de cambio, y respecto a x.....) ¿cuál es el valor, es -1? -1, Es lo mismo	Acción material-verbal	Explicación teórica	No hay correspondencia		Media
P	es el mismo valor el resultado, pero digamos que.....				Mediación de orientación 1	
E	(sigue probando en el manipulativo), si, si es lo mismo.....¿en una está expresado como fracción y el	Acción material-verbal	Descripción teórica	No hay correspondencia		Media

	otro como decimal?					
P	no, aquí la pendiente es un solo número				Mediación de orientación 1	
E	(caso de m infinita) la pendiente es 0, no, la pendiente es indefinida	Acción material-verbal	Descripción teórica	Caracterización		Alta
P	a ver, sígueme moviendo, para ver que diferencia qué relación hay entre pendiente y razón media de cambio				Mediación de orientación 1	
E	(mueve el manipulativo, en silencio) ehhehhh.....creo que no.....no hay diferencia, es lo mismo....este se expresa sobre 1 y este no	Acción material-verbal	Descripción perceptual	Ejemplificación		Media
P	si, en realidad es por una unidad de x, hay tantas unidades de y,, es la única diferencia, pero prácticamente es el mismo.....aquí si te voy a pedir, aquí haríamos un ejercicio numérico				Mediación de orientación 1	
E	antes, en la fórmula ¿qué significa $\Delta y$ ?	Acción material-verbal	Descripción teórica			Alta
P	ah... tú dime				Mediación suave 1	
E	ah ok,.....ah, $\Delta y$ .....ah ya, delta es diferencia, ¿no?	Acción material-verbal	Explicación teórica	Caracterización		Alta
P	exacto,				Mediación suave 1	
E	entonces sería.....y1-y2 sobre x1-x2.y ya.....y ahora ¿qué hago?	Acción verbal	Generalización teórica	Definición		Alta
P	vamos a hacer una pausa, porque se me pasó en el anterior hacer una ejercicio (se hace el ejercicio en papel)				Mediación de orientación 1	
E	Test en papel sobre esbozar una gráfica a partir de información sobre valores de $f(x)$ y $m_{tan}$ en puntos e intervalos interesantes. (Esta tarea correspondía al final de los manipulativos 0a, máquina y prueba 0a, por eso el análisis está al final de esos manipulativos).					

<b>Manipulativo 4</b>						
	<b>Texto de la transcripción</b>	<b>Grado de abstracción</b>	<b>Grado de generalización o amplitud</b>	<b>Grado de explicitación</b>	<b>Grado de independencia</b>	<b>Grado de consciencia o despliegue</b>
P	mueve este manipulativo a ver qué hay ahí	Acción material			Mediación de orientación 1	
E	esta es la razón media de cambio	Acción material-verbal	Explicación perceptual	Ejemplificación		Baja
P	ahora sería una curva.....entre dos puntos de una curva				Mediación de orientación 2	
E	de un punto a.....otro punto.....trazas una línea entre esos dos y te da la pendiente	Acción material-verbal	Descripción teórica	Interpretación		Media
P	esa es la secante (en el pretest el E no la identificó)				Mediación fuerte 1	
E	es la secante.....la pendiente de la secante es la..... razón media de cambio entre dos puntos.....ok, ahora, tomándolo como una ecuación, la fórmula sería delta y, sobre delta x, ¿para la razón media de cambio entre dos puntos?, no entiendo.....para sacar esto de aquí	Acción material-verbal	Descripción perceptual	No hay correspondencia		Baja
P	ve los valores, ve la fórmula				Mediación de orientación 1	
E	(duda)..... 4.603					
P	ese qué es, ¿qué significa eso?				Mediación de orientación 2	
E	valor de y.....delta y.....y de aquí a acá cambia en 4.204, y de aquí a acá, 4.603.....aquí sería 6, en $x=6$ .	Acción material-verbal	Explicación perceptual	Ejemplificación		Baja
P	aquí está en términos de distancia. Ahora te voy a dar una curva, te voy a dar la ecuación de una curva y dos coordenadas de puntos. Tú vas a calcular la razón media de cambio entre dos puntos de la curva. Puedes regresar a ver este (manipulativo).....si quieres apunta esta función, es				Mediación de orientación 2	

	$f(x) = 1 - x^2$ , calcular la razón media de cambio entre los puntos 1,0 y 0,1.					
E	¿cómo son los puntos? ¿1,0 y 0,1?					
P	te estoy dando las coordenadas de 2 puntos, pero.....ah ok, este.....				Mediación de orientación 1	
E	es como si me dieras la recta y hay que calcular la pendiente	Acción perceptual-verbal	Generalización teórica	Definición		Alta
P	exactamente					
E	(resuelve el problema dado)	Acción mental	Generalización teórica	Definición		Alta

### Manipulativo 5

	Texto de la transcripción	Grado de abstracción	Grado de generalización o amplitud	Grado de explicitación	Grado de independencia	Grado de consciencia o despliegue
P	este otro manipulativo, el objetivo está aquí (las instrucciones en la pantalla), tenemos que calcular la pendiente de esta (la recta tangente), te acuerdas del primer manipulativo, de los primeros (se va al manipulativo 0b), queríamos describir lo que pasa con la curva con este número. Ahora sí vamos a calcularlo. esta es nuestra finalidad, digamos el objetivo general. este es el objetivo, calcular la pendiente de esta recta para ver cómo se está comportando la gráfica. Con esta (barra) nomás cambiamos el punto, el lugar.	Acción material			Mediación de orientación 1	
E	y con otra.....	Acción material-verbal	Descripción perceptual	No hay correspondencia		
P	ahorita vamos a ver qué es lo que va a cambiar aquí...si quieres mueve ese y empieza a ver qué es lo que pasa				Mediación de orientación 1	
E	otro punto	Acción material-verbal	Descripción perceptual	No hay correspondencia		
P	es otro punto.....a ver,				Mediación	

	describeme que es lo que está pasando con los puntos, nada más entre los dos puntos.....				suave 1	
E	se trazan líneas	Acción material-verbal	Descripción perceptual	No hay correspondencia		Baja
P	vuelve a empezar desde la izquierda...ahí tenemos un sólo punto y queremos la.....bueno, lo puedes dejar donde quieras, lo puedes dejar fijo, lo podemos dejar fijo.....el otro fíjate lo que hace				Mediación de orientación 2	
E	sale un punto y la tangente de la pendiente (está al revés, pero identifica los elementos)	Acción material-verbal	Descripción perceptual	No hay correspondencia		Baja
P	a ver, la roja es la línea que queremos..... queremos calcular la pendiente de la línea roja				Mediación de orientación 2	
E	la verde también es una tangente	Acción material-verbal	Descripción perceptual	No hay correspondencia		Baja
P	no.....¿en cuántos puntos toca la curva?				Mediación suave 1	
E	la tangente entre este y este.....porque.....ya no se ve.....ah no, está haciendo algo raro (no ha entendido la dinámica del manipulativo)	Acción material-verbal	Descripción perceptual	No hay correspondencia		
P	a ver, vamos a empezar de ahí..es lo único que sé ahorita, el objetivo es calcular la pendiente de esta tangente en este punto (de tangencia)				Mediación de orientación 2	
E	¿de esta tangente?					
P	a ver, échate a la izquierda, aquí, de esa tangente roja, en ese punto, queremos calcular la pendiente de la tangente				Mediación de orientación 2	
E	¿lo hago?					
P	no, bueno, ¿cómo harías, si yo te digo quiero la pendiente de esta recta, que pase por este punto?				Mediación de orientación 2	
E	de x menos 3 , eh.....está en 6					
P	pongamos que te doy la coordenada, 3 coma no sé qué,				Mediación de orientación 2	

	¿cómo sabrías la pendiente de esa recta?					
E	con la fórmula.....no?.....me das la coordenada de este punto					
P	con esta fórmula, no? (le muestra la que E obtuvo antes)				Mediación de orientación 2	
E	pero sólo tengo la coordenada de un punto....¿puedo tener la coordenada de otro punto de la misma tangente?	Acción perceptual-verbal	Explicación perceptual	Ejemplificación		Alta
P	no, yo nada más te daría en ese punto,				Mediación de orientación 1	
E	tengo otra tangente y entonces					
P	¿es otra tangente? A ver, vela bien				Mediación suave 2	
E	no, es....¿es una cómo se llama? Punto medio?, ¿cómo se llama, ese que pasa por este y este?..... (P muestra en la pantalla, secante)	Acción perceptual-verbal	Explicación perceptual	Ejemplificación		Baja
P	secante, secante viene de secar que es cortar, la que corta, entonces bueno.....supongamos que conoces la función y conoces, bueno, el punto de tangencia				Mediación de orientación 2	
E	si el punto de tangencia, no puedo saber la pendiente, a menos que tenga la secante..... y la secante está en este punto	Acción material-verbal	Explicación perceptual	Caracterización		Alta
P	ok, en este momento mira lo que ...observa el valor de la pendiente de la secante, bueno primero observa las coordenadas, este sería el punto rojo (E vio esas coordenadas solo)				Mediación suave 1	
E	ah, las coordenadas..... y aquí tiene otras coordenadas, no es la misma.....ah no	Acción material-verbal	Descripción perceptual	Ejemplificación		
P	a ver, observa, qué podría ser				Mediación de orientación 2	
E	la anterior no hay nada.....pero aquí no existe la verde					
P	no, este es nuestro punto de arranque digamos, ahí				Mediación suave 2	
E	pero tiene coordenadas aquí					



P	son las mismas				Mediación de orientación 2	
E	ah ok.....entonces					
P	ahí mueve				Mediación de orientación 1	
E	consigo otra, y cambia el punto a -6, x, no, x + delta de x,	Acción material-verbal	Explicación teórica	Interpretación		Baja
P	delta x es un pedazo de x				Mediación de orientación 2	
E	puedo saber la pendiente de la secante	Acción material-verbal	Explicación teórica	Interpretación		Media
P	aquí está				Mediación de orientación 2	
E	aquí está la pendiente de la secante.....y la pendiente de.....ah, pero si le muevo					
P	muévele, a ver qué está pasando				Mediación de orientación 1	
E	se acerca	Acción material-verbal	Descripción teórica	Interpretación		Media
P	ok,				Mediación suave 1	
E	a la mitad de lo que estaba en el anterior					
P	si, o.....se acercó				Mediación suave 1	
E	se acercó.....					
P	estos valores qué son				Mediación de orientación 2	
E	la secante					
P	no				Mediación suave 1	
E	la pendiente de la secante					
P	ok, a ver síguelo moviendo. ¿qué pasa con los puntos?				Mediación de orientación 2	
E	van disminuyendo hasta que llega.....¿cada vez es la mitad del anterior?					Media
P	no la mitad, pero es más chiquito				Mediación suave 2	
E	hasta que llega a.....todo esto se puede representar como una gráfica de barras, para saber a qué tiende	Acción perceptual-verbal	Generalización perceptual	Caracterización		Media

	esto					
P	pero porqué gráfica.....estos son valores de pendiente				Mediación suave 2	
E	vas sacando la pendiente cada vez más cerca	Acción material-verbal	Generalización perceptual	Caracterización		Alta
P	ok				Mediación suave 2	
E	la pendiente de la secante, cada vez más cerca, va disminuyendo	Acción material-verbal	Generalización perceptual	Caracterización		Baja
P	¿qué es lo que va disminuyendo?				Mediación de orientación 2	
E	la pendiente de la secante					
P	ah bueno, también puede crecer, si estás en otro punto				Mediación suave 2	
E	si lo vas acercando va siendo más pequeña, no?					
P	pero ¿qué es lo que es más pequeño?				Mediación de orientación 2	
E	la diferencia	Acción material-verbal	Explicación perceptual	Caracterización		Media
P	¿la diferencia?...ah ok, la diferencia				Mediación suave 2	
E	¿cómo puedes saber que es 613?					
P	ahora, la pregunta es ¿qué estrategia se siguió en este manipulativo, para que yo pueda, en este momento,....fíjate, ¿puedes distinguir la secante de la tangente?				Mediación de orientación 2	
E	no, prácticamente es la misma					Media
P	¿podría ser lo mismo? ¿podrías calcular la pendiente si son exactamente iguales?				Mediación suave 1	
E	no, no se puede	Acción perceptual-verbal	Explicación teórica	Caracterización		Alta
P	no, porque tu fórmula necesita siempre dos puntos				Mediación moderada 1	
E	aaaaaaaah,					
	<b>Texto de la transcripción</b>	<b>Grado de abstracción</b>	<b>Grado de generalización o amplitud</b>	<b>Grado de explicitación</b>	<b>(Grado de independencia)</b>	<b>Grado de consciencia o despliegue</b>
P	la pregunta sería...si quieres muévete a otro punto, aquí.....				Mediación de orientación 1	
E	un punto	Acción	Generalización	Caracteriza-		Media

	muy.....ligeramente más lejano, ligeramente lejano al...punto de tangencia	material-verbal	perceptual	ción		
P	ok, entonces digamos, si yo te pidiera que me digas qué estrategia harías,.....es como una pequeña trampita eh?, qué estrategia harías para calcular la pendiente de la tangente, porque ese es nuestro objetivo, eh?, queremos calcular la pendiente de la tangente, me voy a poner otra vez al principio.....quiero la pendiente de esta línea roja				Mediación de orientación 1	
E	¿un aproximado, o un exacto?	Acción perceptual-verbal	Explicación teórica	Caracterización		
P	si yo te dijera el valor exacto, lo más exacto que puedas, ¿cuál fue la estrategia?				Mediación de orientación 2	
E	para ser totalmente exacto tendría que.....dibujar otra, otro punto, una secante, o sea otro punto aquí y una línea que pase por los dos.....luego acercarlos a cierta distancia.....a digamos 0.1, ir de .1 en .1 y de ahí ir registrando los valores, ..... luego esos valores los graficas.....para sacar el valor exacto , y de la gráfica que obtienes...puedes tener una...puedes tener una ecuación	Acción perceptual-verbal	Generalización perceptual	Caracterización		Media
P	pero la ecuación sería.....de qué gráfica saldría, si tu vas, si tu irías poniendo ¿estos valores de la secante?				Mediación de orientación 2	
E	una función exponencial.....porque las funciones exponenciales tienden a cero, mas nunca llegan a cero. Esta tiende a llegar allí pero no llega exactamente allí. ¿puedo hacerlo en papel?	Acción perceptual-verbal	Explicación teórica	Interpretación		
P	claro					

E	pero hay otra forma más fácil, estoy seguro, estoy seguro de eso.	Acción perceptual-verbal	Explicación teórica	Interpretación		Alta
P	la estrategia ya me la contaste, que sería entonces, la que se ve ahí,				Mediación de orientación 2	
E	"-8 y -6, no?, esa es a -7, -7.5, -7.9, etc.	Acción material-verbal	Explicación perceptual	Caracterización		
P	ahora mira lo que hay aquí, en esta columna está delta x, ¿qué sería delta x entonces?				Mediación de orientación 2	
E	el cambio en x	Acción material-verbal	Explicación teórica	Caracterización		
P	ahá				Mediación suave 2	
E	x va cambiando, de aquí para allá, cada vez menos					
P	¿y hasta adonde podría seguir?				Mediación suave 1	
E	podría seguir hasta .000000001, y ese iría .999999999, pero ya el cambio sería tan pequeño que no sería significativo, pero ¿esto es un valor exacto o un aproximado?	Acción perceptual-verbal	Generalización perceptual	Caracterización		Alta
P	es un aproximado				Mediación suave 2	
E	¿se puede saber el valor exacto?	Acción perceptual-verbal	Generalización teórica	Interpretación		
P	por otros métodos, pero es un método que sale de este razonamiento.....digamos ¿crees que existe un valor exacto?				Mediación suave 2	
E	¿un valor exacto?, no	Acción verbal	Generalización teórica	Caracterización		
P	de la pendiente de la tangente....pero sería					
E	muy cercano	Acción verbal	Generalización teórica	Caracterización		
P	¿qué tan cercano?				Mediación suave 1	
E	la diferencial delta x va a tender , tiende a cero, así de cercano	Acción verbal	Generalización teórica	Caracterización		Alta
P	ahora si ya tienes bien entendido				Mediación	

	<p>el...¿no quieres cambiar a otro punto para ver.....sucede prácticamente lo mismo, yo quiero la pendiente de la tangente en rojo.....bueno nada más repíteme la estrategia que se siguió aquí.....la estrategia para calcular la pendiente de la tangente</p>				suave 2	
E	<p>fue lo mismo, dibujaste una ....¿la secante es la línea verde?</p>					
P	<p>si</p>				Mediación suave 2	
E	<p>ok, un punto cercano y una secante, vas acercando el punto, la secante se va acercando a la tangente, hasta que...es un número muy pequeño, es una distancia muy pequeña, y entonces el valor de la pendiente de la secante va cambiando cada vez menos hasta que llega a un punto en el que aunque siga cambiando ya no va a ser gran diferencia</p>	Acción material-verbal	Generalización perceptual	Caracterización		Alta
P	<p>muy bien, ahora viene lo fuerte, este..... con los símbolos que están ahí, los ..... eh.....digamos, ya no una coordenada específica, por ejemplo aquí fue en la coordenada, vamos a calcular digamos, el original fue calcular la pendiente de la tangente en este punto, yo te estoy dando un número, 1, -0.465, pero si yo te dijera vamos a calcularla en un punto genérico, general <math>x</math>, <math>f(x)</math>, porque cada punto es <math>x</math>, <math>f(x)</math>.....con estos símbolos que hay ahí, este este y estos, ¿cómo sería una fórmula que calculara la pendiente de la tangente tomando en cuenta la estrategia esta, ¿cómo sería una fórmula, que tu propusieras una fórmula que hable de esta estrategia que</p>				Mediación de orientación 2	

	me dijiste, ¿cómo la pones, cómo la expresas, todo lo que dijimos, cómo lo pones en una fórmula?					
E	ok, ¿un punto y un punto cercano o sólo un punto?					
P	bueno yo te daría que calcules la pendiente de la tangente en un punto $x$ , $f(x)$ , pero ahí tu, tu me dijiste la estrategia, esa estrategia ¿cómo la pondrías también en la fórmula?, ese punto cercano lo puedes expresar...				Mediación de orientación 2	
E	¿me darías también la fórmula?					
P	¿la función?, no, digamos, pongamos todo es general, digamos una función $y = f(x)$ , y que tú...				Mediación de orientación 1	
E	pero que se tenga la función para...					
P	no necesariamente que tengas la función, en este momento no nos hace falta tener.....por ejemplo no conocemos la ecuación de esta curva, ¿como sería esa fórmula? una fórmula general.....u na fórmula que exprese lo que tu me contaste de la estrategia.....ya no llames -6, 4.26, sino llámalo $x$ , $f(x)$				Mediación de orientación 2	
E	¿también puedo usar como números y constantes en la fórmula, o?					
P	no, sólo símbolos.....o si quieres hacemos un ejercicio antes, yo te doy una función, y te doy un punto, tu lo calculas, y después lo hacemos de manera simbólica, ¿sale?				Mediación de orientación 1	
E	E hace el problema <b>en papel</b>	Acción mental	Generalización teórica	Definición		Alta
P	<b>(Retomando el ejercicio después del cálculo en papel)</b> Ya habíamos dicho lo que es la razón media de cambio, ¿te acuerdas lo que era la razón media de cambio?				Mediación suave 1	

E	la razón instantánea de cambio es casi igual a la pendiente del punto de tangencia.....pero no es exactamente igual porque está un poquito separado.....	Acción verbal	Generalización perceptual	Caracterización		Media
P	debe dar una razón instantánea, la pendiente .....y cómo habíamos definido la razón media de cambio				Mediación suave 1	
E	razón media de cambio era la pendiente de una línea trazada entre un punto de una función y otro punto	Acción verbal	Generalización teórica	Definición		Media
P	ok,				Mediación suave 2	
E	trazas un punto y otro punto, trazas una línea que pase por los dos puntos y sacas la pendiente de eso que esa es la razón media	Acción verbal	Generalización perceptual	Definición		Media
P	¿y la pendiente, cómo era?				Mediación suave 1	
E	la pendiente es sólo de un punto...no, la pendiente de una línea					
P	lo de la razón media, la pendiente a su vez ¿qué significa?				Mediación suave 1	
E	ah, la pendiente es inclinación					
P	medida cómo?				Mediación suave 1	
E	medida como , este, un número decimal que si es negativo va hacia abajo, si es positivo hacia arriba,	Acción verbal	Generalización perceptual	Definición		Baja
P	eh, bueno, está bien				Mediación suave 2	
E	la pendiente está expresada como un número y la razón .....¿como?..... ¿el otro ?					
P	la razón media				Mediación de orientación 1	
E	la razón media es..... este.....una fracción..sobre 1	Acción verbal	Generalización teórica	Definición		Media
P	bueno, entonces, nada más, la razón instantánea de cambio?.....la instantánea?				Mediación suave 1	
E	la razón instantánea de cambio es , este.....					
P	¿cómo se mediría , digamos, en				Mediación de	

	términos de qué?				orientación 2	
E	es la pendiente de la secante.....o sea que trazas un punto muy cerca ..trazas una línea que pase por el punto de .....el punto de.....tangencia, que es el que quieres saber, una línea que pase por los dos, y sacas la pendiente de esa línea,..... entonces es como una línea que te ayuda para sacar la pendiente del punto de tangencia	Acción verbal	Generalización teórica	Caracterización		Alta
P	ok, pero hasta ahí es lo mismo la razón media de cambio que la razón instantánea, ¿Qué sería la diferencia?				Mediación suave 2	
E	la razón instantánea está mucho más cerca, trata de estar lo más cerca posible, la razón media sólo es otro punto en la gráfica	Acción verbal	Generalización teórica	Definición		Alta
P	muy bien, pues muchísimas gracias					
	<b>Texto de la transcripción</b>	<b>Grado de abstracción</b>	<b>Grado de generalización o amplitud</b>	<b>Grado de explicitación</b>	<b>(Grado de independencia)</b>	<b>Grado de consciencia o despliegue</b>

**Tabla 17.** *Transcripción integral del discurso en el escenario de actividad*

**IX.4 Postest 3 de Erick**

<b>Pre-gun-ta</b>	<b>Postest 3 Erick:</b> 28 días después, evidencia de acción mental sin recurrir a los manipulativos	<b>Respuesta de Erick</b>
1	¿Qué es una función?	"Es una expresión matemática que contiene variables en forma de ecuación y que dependiendo de el valor de la primera variable, cambia el valor de la segunda".
2	Traza en forma aproximada en un plano coordinado la gráfica de una función que tenga las características	(Traza la gráfica en forma correcta, un tanto lentamente, pero segura).



	siguientes: $f(-3) > 0$ ; $m_{tan} > 0$ para $(-\infty, -3)$ ; $m_{tan} = 0$ para $x = -3$ ; $m_{tan} < 0$ para $(-3, 0)$ ; $m_{tan} = 0$ para $x = 0$ ; $m_{tan} > 0$ para el intervalo $(0, 2)$ ; $f(2) > 0$ ; $m_{tan} = 0$ en el intervalo $[2, \infty]$ .	
3	Calcular mentalmente la distancia entre los puntos $(-2, -2)$ y $(6, -2)$	(La respuesta es correcta).
4	Calcular mentalmente la distancia entre los puntos $(-2, -2)$ y $(-2, 5)$	(La respuesta es correcta).
5	<p><b>Problema 4.3:</b> (en papel) Calcular la razón de cambio de <math>f(x)</math> entre <math>f(-2)</math> y <math>f(1)</math> si <math>f(x) = 1 - x^2</math> <b>Problema 4.4:</b> En la tabla (en otro documento) aparecen los valores de la variable independiente <math>x</math> y de la variable dependiente <math>g(x)</math>. a) ¿Cuál es la razón media de cambio de <math>g(x)</math> respecto a <math>x</math> en el intervalo <math>[0, 3]</math>. b) ¿Cuál es el valor medio de <math>g(x)</math> en el intervalo <math>[0, 3]</math>?</p>	<p><b>Probl. 4.3</b> Calcula correctamente <math>f(-2)</math> y <math>f(1)</math>, pero calcula mentalmente con error la razón de cambio como el cociente <math>1/3</math> cuando debe ser <math>3/3</math>. <b>Probl. 4.4</b> Calcula correctamente la razón media de cambio poniendo la fórmula <math>(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)</math>, no con la notación <math>f(x)</math>. Pero con esto demuestra que conoce y maneja el concepto, y que el error en el problema 4.3 proviene quizá de no haber escrito la fórmula y haber hecho el cálculo en forma mental. Falla en el valor medio de <math>g(x)</math>, lo cual es inesperado, ya que el concepto "nuevo" (razón media de cambio) lo resolvió bien, mientras que el concepto conocido, el promedio de varios números, fue erróneo.</p>
6	<p><b>Problema 5.3:</b> (en papel). Calcular numéricamente la pendiente de la tangente <math>m_{tan}</math> a la gráfica de la función <math>f(x) = 1 - x^2</math> en el punto <math>(2, -3)</math>.</p>	<p>Grafica correctamente tabulando puntos y representándolos en el plano (no era necesario). Usa la misma estrategia del postest 2, que consiste en encontrar un punto muy cercano al punto dado <math>(2, -3)</math>, que es <math>(2.0000001, -3.0000004)</math>, y con ambos puntos calcula la pendiente con la fórmula <math>(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)</math>, no con la notación <math>f(x)</math> ni con una tabla para ver la tendencia del valor de <math>m_{sec}</math>. Expresa el resultado, que es <math>-4/1</math>, como una razón de cambio, con denominador 1.</p>

Tabla 18: Postest 3 de Erick

IX.5 Análisis del postest 3 de Erick

Pre-gunta	Grado de abreviación de la acción	Grado de atención o auto-regulación	Grado de flexibilidad	Grado de entendimiento o insight	Grado de consciencia o despliegue en el postest
1	Medio. No hay gran abreviación en esta formulación aunque la expresión es más clara y unificada que la del principio.	No hay evidencia pero se infiere del postest un grado medio.	Se expresa en los mismos términos que en el postest 1 y 2.	Se mantiene una formulación un tanto limitada, pues no discrimina las variables independiente y dependiente, pero eso no fue profundizado por el profesor.	Medio
2	Alto. A pesar de la lentitud, ya que es una tarea que la requiere, las operaciones son las justas que se requieren.	No hay evidencia pero se infiere del postest un grado alto.	Aplica la misma estrategia que en el problema del postest 1 y 2, pero no hay otras opciones para solucionar el problema.	El entendimiento fue alto desde el postest 2 y se mantuvo en postest 3.	Alto
3	Alto	No hay evidencia pero se infiere del postest un grado alto.	Aplica la misma estrategia que en el problema del postest 1 y 2.	No hubo errores estructurales.	Alto
4	Alto	No hay evidencia pero se infiere del postest un grado medio.	Aplica la misma estrategia que en el problema del postest 1 y 2.	No hubo errores estructurales.	Alto
5	Medio. Quizá el afán de abreviación (hacer el cálculo mental o visual) provocó el error en el resultado.	No hay evidencia pero se infiere del postest un grado medio.	Aplica la misma estrategia que en el problema del postest 1 y 2. Hay pocas opciones disponibles y no hubo ninguna otra experiencia para aplicar o extender el concepto.	No muestra errores estructurales.	Medio
6	Bajo. La operación fue abreviada desde el postest 2, y es	No hay evidencia pero se infiere del	Aplica la misma estrategia que en el problema del	No muestra errores estructurales.	Alto

	igualmente abreviada en el postest 3, por eso no hay un cambio en la abreviación entre ellos.	postest un grado medio.	postest 1 y 2.		
--	---	-------------------------	----------------	--	--

**Tabla 19.** *Análisis del postest 3 de Erick*

**IX.6 Análisis y resultados de las 7 tareas**

Para cada una de las siete tareas aplicadas (Tareas 0a, 0b, 1, 2, 3, 4 y 5) se presentan a continuación dos tablas: una que compara las *funciones semióticas institucionales de referencia pretendidas* con las *funciones semióticas personales* realmente movilizadas en la actividad para el producto, y otra tabla en la que se analiza la evolución de todas las *dimensiones de cambio* observadas en la actividad y consignadas en la *Tabla 12* para el proceso.

Después se presentará la evolución de las dimensiones de cambio en forma de gráficas que ofrecen una aproximación visual de su trayectoria y razón de cambio.

<b>Manipulativo 0a</b>	
<b>Significado institucional pretendido</b>	<b>Significado personal realmente movilizado</b>
Argumento Si a un valor de $x$ le corresponde siempre sólo un valor de $f(x)$ , entonces las funciones expresan una correspondencia uno-a-uno entre esas dos variables.	No movilizada explícitamente
Concepto de Coordenadas de un punto	Concepto de Coordenadas de un punto

Concepto de Función	Concepto de Función
Concepto de Gráfica de una función	Concepto de Gráfica de una función
Concepto de Plano coordenado	Concepto de Plano coordenado
Concepto de Variable dependiente	Concepto de Variable dependiente
Concepto de Variable independiente	Concepto de Variable independiente
Lenguaje Descripción verbal de lo que es la gráfica de una función	Lenguaje Descripción verbal de lo que es la gráfica de una función
Lenguaje Función como ecuación	Lenguaje Función como ecuación
Lenguaje Función como un conjunto de pares de números	No movilizada explícitamente
Lenguaje Función como una “máquina”	Lenguaje Función como una “máquina”
Lenguaje Función como una gráfica	Lenguaje Función como una gráfica
Lenguaje Notación $f(x)$ para una función (variable dependiente) y $x$ para la variable independiente	Lenguaje Notación $f(x)$ para una función (variable dependiente) y $x$ para la variable independiente
Lenguaje Representación de puntos de la gráfica en un plano coordenado	Lenguaje Representación de puntos de la gráfica en un plano coordenado
Algoritmo Calcular el valor de $f(x)$ sustituyendo un valor de $x$ en la expresión de la función	Algoritmo Calcular el valor de $f(x)$ sustituyendo un valor de $x$ en la expresión de la función
Algoritmo Describir en lenguaje natural, numérico y algebraico la forma de la gráfica en puntos e intervalos interesantes	Algoritmo Describir en lenguaje natural, numérico y algebraico la forma de la gráfica en puntos e intervalos interesantes
Algoritmo Establecer pares ordenados $[x, f(x)]$	Algoritmo Establecer pares ordenados $[x, f(x)]$
Algoritmo Trazar la gráfica de $f(x)$ uniendo los puntos	Algoritmo Trazar la gráfica de $f(x)$ uniendo los puntos
Algoritmo Ubicar puntos $[x, f(x)]$ en el plano coordenado	Algoritmo Ubicar puntos $[x, f(x)]$ en el plano coordenado
Proposición A cada punto de la gráfica le corresponde un par $[x, f(x)]$	Proposición: A cada punto de la gráfica le corresponde un par $[x, f(x)]$
Proposición El valor de la variable dependiente $f(x)$ depende del valor de la variable independiente $x$	Proposición El valor de la variable dependiente $f(x)$ depende del valor de la variable independiente $x$
Proposición La gráfica de una función es la representación en un plano coordenado del conjunto de pares $[x, f(x)]$	Proposición La gráfica de una función es la representación en un plano coordenado del conjunto de pares $[x, f(x)]$

Proposición Una función se puede expresar con una tabla de pares de números, con una gráfica, con una ecuación y con palabras.	No movilizada explícitamente
	Concepto Máximo o mínimo local
	Lenguaje Describir en lenguaje natural, numérico y algebraico la forma de la gráfica en puntos e intervalos interesantes

Dimensión del cambio	Análisis del Manipulativo 0a (trayectoria, razón de cambio, variabilidad, fuente)
El grado de abstracción	El grado de abstracción de las acciones arranca con acción material en un periodo breve, y luego prácticamente se mueve en sólo dos categorías, que son la <i>material-verbal</i> y la <i>verbal</i> . Esto es debido a que E habla mientras acciona el manipulativo y trata de responder a las preguntas de P. La <i>acción verbal</i> se da en los casos en que E ya conoce previamente los componentes del significado y los expresa oralmente. El regreso a la acción material-verbal se debió a que E nunca había considerado las distintas representaciones de función, y debe regresar al manipulativo. En el postest conjuga todo lo tratado y lo hace a nivel mental. Fue necesario ampliar las categorías de Galperin al momento de adaptarlas a la experiencia con los manipulativos, pues hay traslapes al momento en que E habla mientras acciona el manipulativo, o habla mientras ve o visualiza el manipulativo pero sin accionarlo. De ahí nacen las categorías material-verbal, y perceptual-verbal, esta apoyada en van Erp (citar).
La función de la acción (de orientación, de ejecución o control)	La función predominante de las acciones es la de <i>orientación</i> y no de <i>ejecución</i> , por mucho que E mueve el manipulativo virtual; la razón es que las preguntas de P enfocan la atención y mantienen a la vista constantemente el objetivo de la tarea dando instrucciones y pistas a E, labores que son netamente de orientación.
El grado de generalización o amplitud	Cuando las preguntas de P tocan un punto que E no conoce, o lo conoce poco o no lo relaciona con otros objetos, se dan descripciones perceptuales apoyadas en el manipulativo. Si E conoce previamente algún componente, hay explicaciones teóricas. Cuando E conecta componentes conocidos y poco conocidos, hay explicaciones y generalizaciones perceptuales. Las generalizaciones teóricas se dan al final en el postest.
El grado de explicitación u objetivación	Cuando E conoce los componentes, hace caracterizaciones al momento de las preguntas. Si las conecta con otros objetos del manipulativo, hace definiciones. Solo baja a hacer ejemplificaciones cuando no estaba consciente de que una función se puede expresar de varias formas.
El grado de independencia	El grado de independencia del sujeto está en proporción inversa al grado de mediación del profesor. A mayor grado de mediación, menos independencia de E. El nivel de mediación inicial del profesor siempre es el mismo, la mediación de orientación 1 y 2, pues se ofrecen instrucciones y pistas a E, lo que le otorga independencia para explorar el manipulativo bajo la guía de P. El nivel de

	mediación del manipulativo es también constante, la mediación fuerte grado 1, pues muestra directamente la estrategia a seguir por E. En los momentos en que E se desvía del objetivo o da respuestas alejadas del significado institucional, el P hace preguntas adicionales o explicita las preguntas ya hechas, entrando en combinación con el manipulativo al dar mediación fuerte grado 2, al asegurarse de que las respuestas de E converjan hacia las institucionales. En el postest 2 y 3, E actúa completamente independiente de las mediaciones del manipulativo y del profesor. En el postest 1 pudo apoyarse en el manipulativo, lo cual no sucedió.
El grado de consciencia o despliegue	Cuando E expresa conocimientos previos, lo hace inteligiblemente y con claridad. Pierde claridad cuando trata con la noción también conocida de función, pero se apoya en lenguaje de ecuaciones, no de funciones. También pierde claridad cuando quiere explicar las distintas formas de expresar una función. En el postest 3 se verá la calidad de juicio y la claridad sobre sus errores.
El grado de abreviación en postest 3.	No hay gran abreviación en esta formulación aunque la expresión es más clara y unificada que la del principio.
El grado de atención o auto-regulación en postest 3.	No hay evidencia
El grado de flexibilidad en postest 3.	Se expresa en los mismos términos que en el postest 1 y 2.
El grado de entendimiento o insight en postest 3.	Se mantiene la formulación un tanto limitada, pues no discrimina las variables independiente y dependiente, pero eso no fue profundizado por el profesor.
El grado de consciencia o despliegue en postest 3.	Medio.

<b>Manipulativo 0b</b>	
<b>Significado institucional pretendido</b>	<b>Significado personal realmente movilizado</b>
Argumento: La pendiente nula indica que la gráfica está estacionaria, no crece ni decrece, por lo tanto es posible que haya un punto máximo o mínimo local, o ninguno de los dos.	No movilizada explícitamente
Argumento: Si a la izquierda de un punto de la curva hay pendientes negativas y a la derecha del punto pendientes positivas, entonces ese punto es un mínimo local	Argumento: Si a la izquierda de un punto de la curva hay pendientes negativas y a la derecha del punto pendientes positivas, entonces ese punto es un mínimo local

Argumento: Si a la izquierda de un punto de la curva hay pendientes positivas y a la derecha del punto pendientes negativas, entonces ese punto es un máximo local	Argumento: Si a la izquierda de un punto de la curva hay pendientes positivas y a la derecha del punto pendientes negativas, entonces ese punto es un máximo local
Argumento: Si el número en el cuadro mide la pendiente de la recta tangente, y la tangente describe el comportamiento de la curva, entonces el número describe el comportamiento de la curva.	No movilizada explícitamente
Concepto: Máximo o mínimo local	Concepto: Máximo o mínimo local
Concepto: Pendiente de una curva en un punto	Concepto: Pendiente de una curva en un punto
Concepto: Pendiente de una recta	Concepto: Pendiente de un segmento recto
Concepto: Recta tangente a una curva	Concepto: Recta tangente a una curva
Lenguaje: Gráfica cartesiana donde se represente la curva y la recta tangente	Lenguaje: Gráfica cartesiana donde se represente la curva y la recta tangente
Lenguaje: Lenguaje natural para describir el comportamiento de la gráfica	Lenguaje: Lenguaje natural para describir el comportamiento de la gráfica
Lenguaje: Valor numérico de la pendiente	Lenguaje: Valor numérico de la pendiente
Algoritmo: Observar el signo y valor de la pendiente de la tangente y relacionarlo con el comportamiento de la recta y de la curva	Algoritmo: Observar el signo y valor de la pendiente de la tangente y relacionarlo con el comportamiento de la recta y de la curva
Proposición: En los puntos máximos y mínimos de la gráfica la pendiente de la tangente vale 0.	Proposición: En los puntos máximos y mínimos de la gráfica la pendiente de la tangente vale 0.
Proposición: La pendiente de la recta tangente en un punto de tangencia equivale a la pendiente de la curva en ese punto.	Proposición: La pendiente de la recta tangente en un punto de tangencia equivale a la pendiente de la curva en ese punto.
Proposición: La pendiente describe el comportamiento de la recta tangente y de la gráfica.	Proposición: La pendiente describe el comportamiento de la recta tangente a la gráfica.
Proposición: La pendiente negativa indica que la gráfica está bajando	Proposición: La pendiente negativa indica que la gráfica está bajando
Proposición: La pendiente positiva indica que la gráfica está subiendo	Proposición: La pendiente positiva indica que la gráfica está subiendo

<b>Dimensión del cambio</b>	<b>Análisis del Manipulativo 0b</b> (trayectoria, razón de cambio, variabilidad, fuente)
Grado de abstracción	Se pasa rápidamente de acción material a perceptual-verbal y a verbal, pero casi siempre es material-verbal apoyándose en el manipulativo y hablando, incluso en el postest, que resuelve lentamente y en el que regresa varias veces al manipulativo.
Grado de generalización	Se mantiene mucho tiempo en nivel bajo de descripción perceptual, hay temas nuevos para E. Debido a la mediación moderada 1 de P, que amplía la pregunta y la focaliza, E tiene un insight y salta rápidamente al grado máximo, generalización teórica.
Grado de explicitación	Hay gran fluctuación e irregularidad entre caracterizaciones y no correspondencias, ya que E todavía no ve la relación de $m_{tan}$ con la forma de la curva. No hay correspondencia cuando se le pregunta sobre ¿cómo saber si un punto donde $m_{tan}$ es 0, es un máximo o un mínimo local?. En el insight debido a la mediación moderada de P, donde se sugiere una estrategia para saber la respuesta, E llega con rapidez al nivel de definiciones.
Grado de independencia	E actúa con alta independencia al principio, recibiendo sólo instrucciones y pistas, pero en la duda, fue necesaria mediación moderada 1 de P, ampliando y focalizando la pregunta y sugiriendo una estrategia. Luego del insight, E vuelve a ser independiente.
Grado de consciencia o despliegue	La expresión de E es de nivel medio gran parte del tiempo, y descendiendo a bajo en la duda. Después del insight por la mediación de P, se expresa en nivel alto.
El grado de abreviación en postest 3	Alto. A pesar de la lentitud, ya que es una tarea que la requiere, las operaciones son las justas que se requieren.
El grado de atención o auto-regulación en postest 3	No hay evidencia pero se infiere de sus resultados en postest como alta.
El grado de flexibilidad en postest 3	Medio. Aplica la misma estrategia que en el problema del postest 1 y 2, pero no hay otras opciones para solucionar el problema.
El grado de entendimiento o insight en postest 3	Alto. El entendimiento fue alto desde el postest 2 y se mantuvo en postest 3.
Grado de consciencia o despliegue en postest 3	La claridad e intelegibilidad de la expresión de Erick es de nivel alto.

**Manipulativo 1**



<b>Significado institucional pretendido</b>	<b>Significado personal realmente movilizado</b>
Argumento: En todos los casos mostrados en el manipulativo, sin importar los cuadrantes donde estén los puntos, la diferencia entre las abscisas mayor y menor calcula la distancia pedida.	Argumento: En todos los casos mostrados en el manipulativo, sin importar los cuadrantes donde estén los puntos, la diferencia entre las abscisas mayor y menor calcula la distancia pedida.
Concepto: Coordenadas	Concepto: Coordenadas
Concepto: Distancia entre puntos en un plano coordenado	Concepto: Distancia entre puntos en un plano coordenado
Lenguaje: Cálculo numérico de la distancia	Lenguaje: Cálculo numérico de la distancia
Lenguaje: Descripción del proceso en lenguaje natural	Lenguaje: Descripción del proceso en lenguaje natural
Lenguaje: Fórmula simbólica de la distancia	Lenguaje: Fórmula simbólica de la distancia
Lenguaje Gráfico: ubicación de las coordenadas de puntos en un plano coordenado.	Lenguaje Gráfico: ubicación de las coordenadas de puntos en un plano coordenado.
Algoritmo Proponer y probar una fórmula que calcule la distancia entre los puntos	Algoritmo Proponer y probar una fórmula que calcule la distancia entre los puntos
Proposición: La diferencia entre la abscisa mayor y la abscisa menor calcula la distancia entre puntos alineados horizontalmente.	Proposición: La diferencia entre la abscisa mayor y la abscisa menor calcula la distancia entre puntos alineados horizontalmente.
Proposición: La distancia siempre es positiva	No movilizada explícitamente

<b>Análisis del Manipulativo 1</b>	
Grado de abstracción	Rápidamente pasa de acción material a material-verbal y verbal debido a la facilidad del tema. Llega muy rápido a la acción mental por la misma razón.
Grado de generalización	Pasa muy rápido del nivel más bajo de descripción perceptual a los altos (generalización perceptual) sin pasar por los intermedios. Generaliza teóricamente con igual rapidez debido a la facilidad del tema, que aunque no es nuevo, no lo había formulado conscientemente.
Grado de explicitación	Después de varios intentos donde no hay correspondencia con el objeto pretendido, salta con rapidez a la definición sin pasar por ningún grado intermedio (ejemplos, caracterizaciones, interpretaciones).

Grado de independencia	Al principio E actúa con independencia recibiendo sólo instrucciones y pistas. Ante una formulación errónea o dudosa de E, P hace supervisar la respuesta de E con una mediación suave 1, y a partir de ahí, E actúa de nuevo con independencia.
Grado de consciencia o despliegue	E es poco claro al dar la respuesta que considera muy fácil, por eso no hace falta abundar sino que da una fórmula. Por la facilidad del tema no considera necesario ser más claro en su expresión. Quizá hace falta que P lo induzca a formular con claridad su hallazgo.
Grado de abreviación de la acción en postest 3	E abrevia todas las operaciones originales
Grado de atención o auto-regulación (en papel)	No hay evidencia pero se infiere de sus resultados en postest como alto.
Grado de flexibilidad en postest 3	Aplica la misma estrategia que en el problema del postest 1 y 2.
Grado de entendimiento o insight en postest 3	No hubo errores estructurales.
Grado de consciencia o despliegue en postest 3	Alto

<b>Manipulativo 2</b>	
<b>Significado institucional pretendido</b>	<b>Significado personal realmente movilizado</b>
Argumento: En todos los casos mostrados en el manipulativo, sin importar los cuadrantes donde estén los puntos, la diferencia entre las ordenadas mayor y menor calcula la distancia pedida.	Argumento: En todos los casos mostrados en el manipulativo, sin importar los cuadrantes donde estén los puntos, la diferencia entre las ordenadas mayor y menor calcula la distancia pedida.
Concepto: Coordenadas	Concepto: Coordenadas
Concepto: Distancia entre puntos en un plano coordenado	Concepto: Distancia entre puntos en un plano coordenado
Lenguaje: Cálculo numérico de la distancia	Lenguaje: Cálculo numérico de la distancia
Lenguaje: Descripción del proceso en lenguaje natural	Lenguaje: Descripción del proceso en lenguaje natural
Lenguaje: Fórmula simbólica de la distancia	Lenguaje: Fórmula simbólica de la distancia

Lenguaje Gráfico: ubicación de las coordenadas de puntos en un plano coordenado.	Lenguaje Gráfico: ubicación de las coordenadas de puntos en un plano coordenado.
Algoritmo Proponer y probar una fórmula que calcule la distancia entre los puntos	Algoritmo Proponer y probar una fórmula que calcule la distancia entre los puntos
Proposición: La diferencia entre la ordenada mayor y la ordenada menor calcula la distancia entre puntos alineados verticalmente.	No movilizada explícitamente
Proposición: La distancia siempre es positiva	No movilizada explícitamente

<b>Análisis del Manipulativo 2</b>	
Grado de abstracción	Se mantiene siempre en material-verbal, pues el tema es el mismo que el manipulativo anterior, adaptado fácilmente por E, que lo hace muy rápidamente.
Grado de generalización	Siempre habla de una generalización teórica por haber resuelto antes un problema muy parecido.
Grado de explicitación	Desde el principio da una definición por haber resuelto antes un problema muy parecido.
Grado de independencia	E actúa independiente, casi no necesita ninguna instrucción ni pista.
Grado de consciencia o despliegue	La expresión de E es de nivel bajo y medio y nunca alcanza el alto debido a que encuentra la solución muy rápidamente por haber resuelto poco antes un problema muy parecido. No se detiene a expresar con claridad la solución pues fue directamente a la fórmula. P no pidió que hiciera esa formulación final.
Grado de abreviación de la acción en postest 3	3
Grado de atención o auto-regulación (en papel)	No hay evidencia pero se infiere de sus resultados en postest como alto.
Grado de flexibilidad en postest 3	1. Aplica la misma estrategia que en el problema del postst 1 y 2.
Grado de entendimiento o insight en postest 3	2. No hubo errores estructurales.
Grado de consciencia o despliegue en postest 3	Alto

<b>Manipulativo 3</b>	
<b>Significado institucional pretendido</b>	<b>Significado personal realmente movilizado</b>
Argumento: Al ser $\Delta y$ y $\Delta x$ distancias dirigidas (tienen signo), la pendiente también tiene signo.	No movilizada explícitamente
Concepto:: Pendiente de un segmento recto	Concepto: Pendiente de un segmento recto
Concepto: Razón media de cambio en un segmento recto	Concepto: Razón media de cambio en un segmento recto
Lenguaje: El cociente numérico de los desplazamientos vertical y horizontal	Lenguaje: El cociente numérico de los desplazamientos vertical y horizontal
Lenguaje: El símbolo $m$ para la pendiente	No movilizada explícitamente
Lenguaje: El símbolo $\Delta x$ para el desplazamiento horizontal de un punto respecto a otro.	Lenguaje: El símbolo $\Delta x$ para el desplazamiento horizontal de un punto respecto a otro.
Lenguaje: El símbolo $\Delta y$ para el desplazamiento vertical de un punto respecto a otro.	Lenguaje: El símbolo $\Delta y$ para el desplazamiento vertical de un punto respecto a otro.
Lenguaje: La definición verbal de pendiente y de razón de cambio	Lenguaje: La definición verbal de pendiente y de razón de cambio
Lenguaje: La fórmula simbólica que calcula la pendiente o razón media de cambio en función de $\Delta y$ y $\Delta x$	Lenguaje: La fórmula simbólica que calcula la pendiente o razón media de cambio en función de $\Delta y$ y $\Delta x$
Algoritmo: Calcular el cociente de desplazamientos $\Delta y / \Delta x$	No movilizada explícitamente
Algoritmo: Calcular la razón de cambio a partir del cociente de desplazamientos	Algoritmo: Calcular la razón de cambio a partir del cociente de desplazamientos
Algoritmo: Calcular los desplazamientos horizontal y vertical de un punto respecto a otro en un plano	Algoritmo: Calcular los desplazamientos horizontal y vertical de un punto respecto a otro en un plano

coordenado.	coordenado.
Proposición $\Delta y$ y $\Delta x$ son distancias dirigidas, o sea, tienen signo.	No movilizada explícitamente
Proposición La pendiente de un segmento recto lo da el cociente $\Delta y / \Delta x$ .	Proposición La pendiente de un segmento recto lo da el cociente $\Delta y / \Delta x$ .
Proposición La pendiente mide el grado y la dirección de la inclinación del segmento recto.	Proposición La pendiente mide el grado y la dirección de la inclinación del segmento recto.

<b>Análisis del Manipulativo 3</b>	
Grado de abstracción	Después de la consabida acción material muy breve se mantiene en material-verbal casi todo el tiempo mientras va respondiendo a las preguntas de P. Concluye con acción verbal al definir la fórmula de la pendiente, que no está en el manipulativo, y en un problema resuelto correctamente en acción mental, sin hablar ni ver al manipulativo.
Grado de generalización	Como es un concepto conocido previamente, E hace descripciones teóricas y explicaciones, pero hace una regresión a descripción perceptual cuando debe relacionar la pendiente con la razón de cambio, concepto nuevo. Cuando la resuelve, rápidamente generaliza teóricamente después de pasar por explicación teórica.
Grado de explicitación	Gran irregularidad en el nivel, desde no correspondencia a caracterizaciones, volviendo a bajar y subir, debido a la introducción y relación de razón de cambio y pendiente, un concepto nuevo y uno conocido, aunque relacionados. Al final, con una mediación suave 1 de P, termina definiendo. La velocidad de cambio es de todos modos rápida.
Grado de independencia	Se mantiene casi siempre muy independiente, sólo con orientación 1 y 2, salvo cuando E hace preguntas y P se las devuelve, orillándolo a responder por sí mismo. Al final E actúa de nuevo independiente.
Grado de consciencia o despliegue	Se mantiene en nivel medio de claridad, fluctuando con la alta y termina alta al dar la fórmula verbal para pendiente y razón de cambio, sin definirla pues P no lo pidió. La fluctuación se debe a que debe relacionar un concepto nuevo (razón de cambio) con uno conocido (la pendiente), que coinciden numéricamente, pero pueden definirse en forma distinta.
Grado de abreviación de la acción en posttest 3	No procede
Grado de atención o	No procede

auto-regulación (en papel)	
Grado de flexibilidad en postest 3	No procede
Grado de entendimiento o insight en postest 3	No procede
Grado de consciencia o despliegue en postest 3	No procede

<b>Manipulativo 4</b>	
<b>Significado institucional pretendido</b>	<b>Significado personal realmente movilizado</b>
Argumento De acuerdo a todos los casos mostrados en el manipulativo, el valor numérico de la secante coincide con el de la razón de cambio	Argumento De acuerdo a todos los casos mostrados en el manipulativo, el valor numérico de la secante coincide con el de la razón de cambio
Concepto Recta secante	Concepto Recta secante
Lenguaje Cociente numérico de las diferencias vertical y horizontal entre los puntos de la gráfica	No movilizada explícitamente
Lenguaje Definición verbal de la razón media de cambio entre dos puntos de una curva	Lenguaje Definición verbal de la razón media de cambio entre dos puntos de una curva
Lenguaje Gráfica de la curva	Lenguaje Gráfica de la curva
Lenguaje Símbolo para la pendiente de la secante $m_{sec}$	No movilizada explícitamente
Algoritmo Calcular el cociente de desplazamientos $\Delta y / \Delta x$	Algoritmo Calcular el cociente de desplazamientos $\Delta y / \Delta x$
Algoritmo Calcular la razón media de cambio a partir del cociente de desplazamientos	Algoritmo Calcular la razón media de cambio a partir del cociente de desplazamientos

Algoritmo Calcular los desplazamientos horizontal y vertical entre dos puntos de la gráfica de la curva.	Algoritmo Calcular los desplazamientos horizontal y vertical entre dos puntos de la gráfica de la curva.
Algoritmo Interpretar la razón media de cambio como la pendiente de la secante que pasa por los puntos	Algoritmo Interpretar la razón media de cambio como la pendiente de la secante que pasa por los puntos
Proposición La razón media de cambio entre los puntos es la pendiente de la recta secante que pasa por ellos	Proposición La razón media de cambio entre los puntos es la pendiente de la recta secante que pasa por ellos
Proposición La razón media de cambio se expresa como la relación del número de unidades de desplazamiento de $f(x)$ respecto a un desplazamiento 1 en $x$ .	No movilizada explícitamente

<b>Análisis del Manipulativo 4</b>	
Grado de abstracción	Breve acción material, se mantiene en material-verbal casi todo el tiempo, describe la situación pero no relaciona con razón de cambio, hasta que descubre en el problema planteado que no necesita saber la ecuación de la curva, sólo con las coordenadas puede calcular la razón de cambio, que es acción perceptual-verbal, y termina el postest en acción mental correcta.
Grado de generalización	Comienza describiendo teóricamente y explicando la situación correctamente, "se traza una recta entre los 2 puntos y se calcula su pendiente", pero no relaciona el concepto con el algoritmo que está en el manipulativo, lo confunde, baja a describir perceptualmente porque no entiende razón de cambio, pero cuando se pide a E calcular numéricamente una razón de cambio, descubre que basta conocer 2 puntos sin conocer la ecuación de la función, y vuelve a generalizar teóricamente, incluso en el postest en forma correcta.
Grado de explicitación	Comienza fluctuando entre nivel bajo y medio de explicitación, hasta que se pierde al no relacionar la gráfica con el algoritmo para la razón de cambio que está en el manipulativo. A pesar de la mediación fuerte de P, E descubre que hay sobreinformación, y sólo toma lo que necesita. Reacciona y va directamente a la definición.
Grado de independencia	E comienza independiente con orientación, pero hay necesidad de señalar directamente la recta secante, pues no la había identificado en el pretest general. Después de eso regresa a ser relativamente independiente, necesita sólo orientación.
Grado de consciencia o	Comienza con expresión dudosa, de nivel bajo. Después del descubrimiento de

despliegue	E, P sube a lo alto de la claridad e inteligibilidad.
Grado de abreviación de la acción en postest 3	2. Quizá el afán de abreviación (hacer el cálculo mental o visual) provocó el error en el resultado.
Grado de atención o auto-regulación (en papel)	No hay evidencia pero se infiere de sus resultados en postest como alto.
Grado de flexibilidad en postest 3	1. Aplica la misma estrategia que en el problema del postst 1 y 2. Hay pocas opciones disponibles y no hubo ninguna otra experiencia para aplicar o extender el concepto.
Grado de entendimiento o insight en postest 3	2. No muestra errores estructurales.
Grado de consciencia o despliegue en postet 3	Medio

<b>Manipulativo 5</b>	
<b>Significado institucional pretendido</b>	<b>Significado personal realmente movilizado</b>
Argumento: La pendiente de la tangente es el valor al que tiende la pendiente de la secante al acercarse más y más el punto móvil cercano al punto de tangencia.	Argumento: La pendiente de la tangente es el valor al que tiende la pendiente de la secante al acercarse más y más el punto móvil cercano al punto de tangencia.
Argumento: Mientras la recta secante se aproxima a la recta tangente, la pendiente de la secante se aproxima a la pendiente de la tangente.	Argumento: Mientras la recta secante se aproxima a la recta tangente, la pendiente de la secante se aproxima a la pendiente de la tangente.
Concepto: Límite de un cociente de desplazamientos	No movilizada explícitamente
Concepto: Límite de una secuencia	No movilizada explícitamente
Concepto: Razón instantánea de cambio	Concepto: Razón instantánea de cambio
Lenguaje: Gráfico: recta tangente, recta secante, curva	Lenguaje: Gráfico: recta tangente, recta secante, curva
Lenguaje: Natural: descripción verbal de la estrategia	No movilizada explícitamente

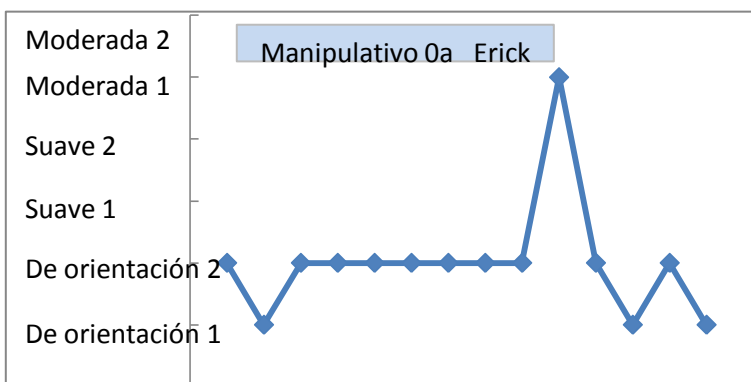
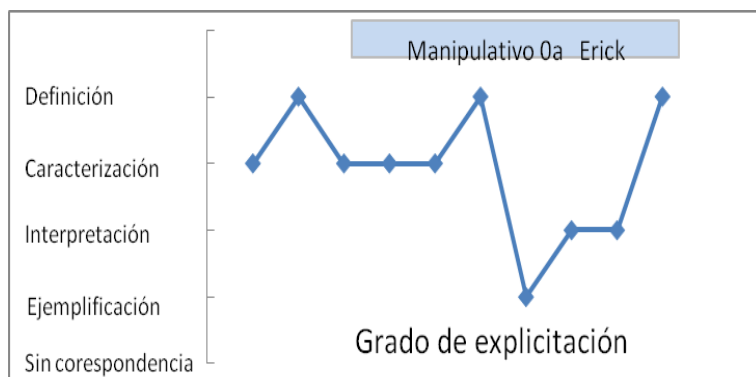
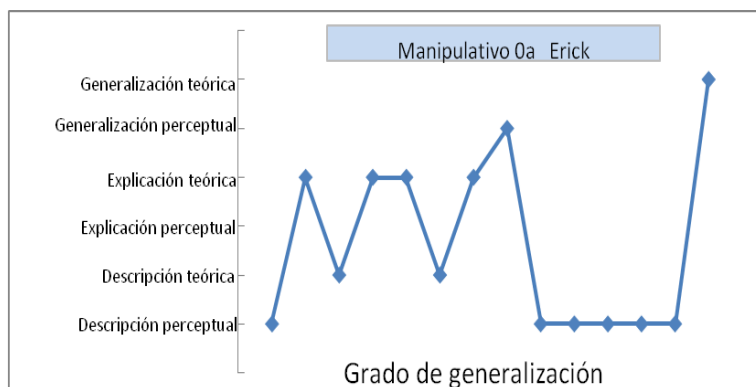
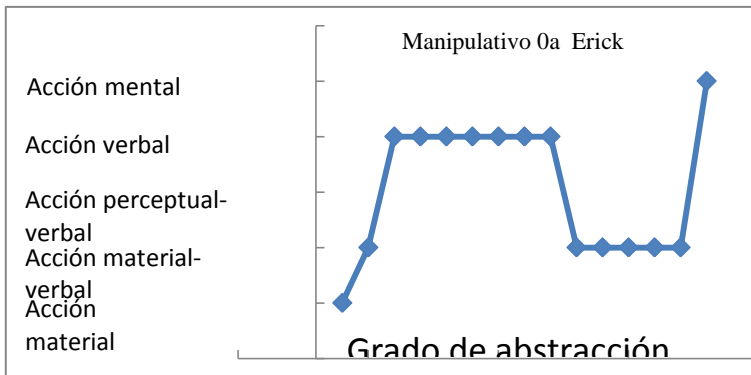


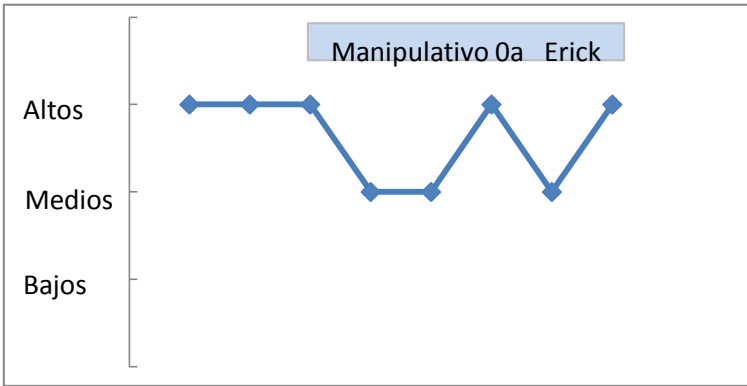
para calcular $m_{tan}$	
Lenguaje: Numérico: valor de la pendiente de la secante. Valor de tendencia de la pendiente de la secante al acercarse un punto al de tangencia.	Lenguaje: Numérico: Valor de tendencia de la pendiente de la secante al acercarse un punto al de tangencia.
Lenguaje: Numérico: Valor de tendencia de la pendiente de la secante al acercarse un punto al de tangencia.	No movilizada explícitamente
Lenguaje: Algebraico: símbolos para las coordenadas $[x, f(x)]$ y $[x+Dx, f(x+Dx)]$ .	No movilizada explícitamente
Fórmula para hallar $m_{tan}$ para cualquier punto $[x, f(x)]$ . $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	$\frac{f(x) - (f(x + \Delta x \downarrow))}{x - (x + \Delta x \downarrow)}$ <p>Esta es la fórmula propuesta por Erick después de un largo diálogo con el profesor y varios intentos para incluir la idea de acercamiento infinito.</p>
Algoritmo Aproximar la recta secante a la recta tangente	Algoritmo Aproximar la recta secante a la recta tangente
Algoritmo Calcular la pendiente de la recta secante que pasa por el punto de tangencia y por otro punto móvil cercano	Algoritmo Calcular la pendiente de la recta secante que pasa por el punto de tangencia y por otro punto móvil cercano
Algoritmo Observar la tendencia del valor de la pendiente de la secante e identificar esta tendencia con la pendiente de la tangente	No movilizada explícitamente
Proposición La pendiente de la tangente en un punto es la pendiente de la curva en ese punto	No movilizada explícitamente
Proposición La pendiente de la tangente expresa cómo está cambiando la función en el punto de tangencia.	No movilizada explícitamente
Proposición La pendiente de la tangente no puede calcularse con la fórmula convencional pues no se conoce más que un solo punto de los dos que exige la fórmula.	Proposición La pendiente de la tangente no puede calcularse con la fórmula convencional pues no se conoce más que un solo punto de los dos que exige la fórmula.
Proposición La pendiente de la tangente representa la razón instantánea de cambio de la función $f(x)$ respecto a $x$	No movilizada explícitamente
Proposición La recta tangente puede ser vista como una secante en la que los puntos de corte de la gráfica están infinitamente cercanos.	Proposición La recta tangente puede ser vista como una secante en la que los puntos de corte de la gráfica están infinitamente cercanos.

<b>Análisis del Manipulativo 5</b>	
Grado de abstracción	Gran irregularidad entre la acción material-verbal y perceptual-verbal, pues E no ha captado la dinámica del manipulativo, y confunde la recta secante con otra tangente (en el pretest general falló en este tema). Lentamente empieza a captar la estrategia de acercar un punto al de tangencia y el posterior cálculo de $m_{sec}$ , pero no capta la estrategia en sí. Ante la mediación moderada 1 de P, que explica que la fórmula de pendiente requiere 2 puntos, mientras que E no había visto que sólo dispone de un punto, E capta la estrategia, pero no la del límite de una secuencia, sino la de un acercamiento cada vez más próximo hasta que la diferencia ya no es significativa. El test en papel lo hace con esa idea en nivel mental. Hay una aproximación a la idea de límite de manera gráfica, cuando E dice que hay que graficar los valores de $m_{sec}$ para ver cuál es el valor al que tiende, pero P no la entiende y pasa a otra cosa. Después P le pide a E formular oralmente la estrategia y definir la razón instantánea de cambio, lo que E hace en acción verbal, prescindiendo del manipulativo. La trayectoria en general es ascendente pero la razón de cambio es muy lenta al principio, y se acelera cuando formula la idea correcta. La trayectoria y razón de cambio son irregulares.
Grado de generalización	Mientras E no ha captado la estrategia, hace descripciones perceptuales. Hay un salto a explicaciones teóricas cuando P orilla a E a ver la fórmula de pendiente y comprobar que necesita 2 puntos. Lentamente avanza en dar explicaciones, con la mediación moderada de P alcanza generalizaciones perceptuales, y sólo en un diálogo prolongado con P, va llegando a generalizar teóricamente. E hace una excelente pregunta acerca de si el valor calculado es exacto o aproximado, la cuestión del límite. P dice que el proceso numérico es aproximado, y el exacto se calcula con otros métodos. Ante la pregunta de P acerca de qué tan cercano es el valor numérico, E menciona que la diferencia tiende a 0, pero su estrategia operacional no incluye la idea de límite de una secuencia. De todos modos termina con generalizaciones perceptuales y teóricas. La trayectoria es un tanto irregular pero siempre ascendente, con la ayuda de P.
Grado de explicitación	Mientras E no capta la idea del manipulativo, no hay correspondencia con el significado institucional. Lentamente y con la interacción en que P aclara el objetivo, da pistas y hace preguntas de acercamiento, E va subiendo a ejemplificaciones y caracterizaciones. Siempre en intenso diálogo y basado en que P enfoca una y otra vez el objetivo, hace preguntas que enfocan la atención en aspectos específicos esperando que E los vaya conectando con lo que ha dicho y lo que está haciendo en el manipulativo. Continúa la tendencia ascendente hacia las caracterizaciones y definiciones.
Grado de independencia	En momentos de desviación, duda, ignorancia o error de E, es crucial la mediación suave y moderada de P, que consiste en que P ayuda a que E supervise su respuesta errónea o a retroalimentar esa respuesta buscando que E la aborde de nuevo y de otra manera. A veces es necesario ir más allá y P sugiere una estrategia que E puede usar. En otros momentos de exploración del manipulativo priva la mediación de orientación 1 y 2, que consiste en dar instrucciones y pistas a E, siendo E bastante independiente para explorar el manipulativo.

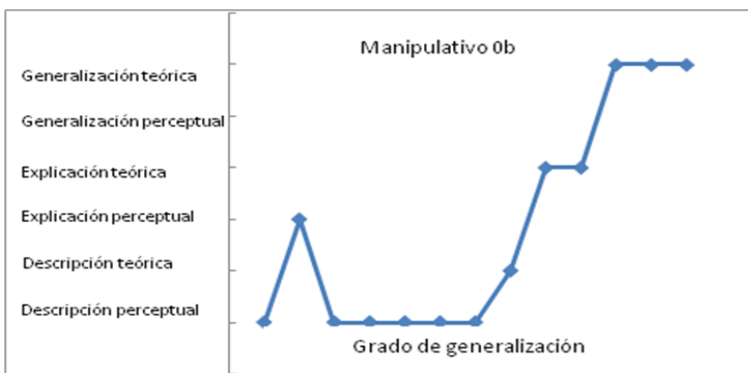
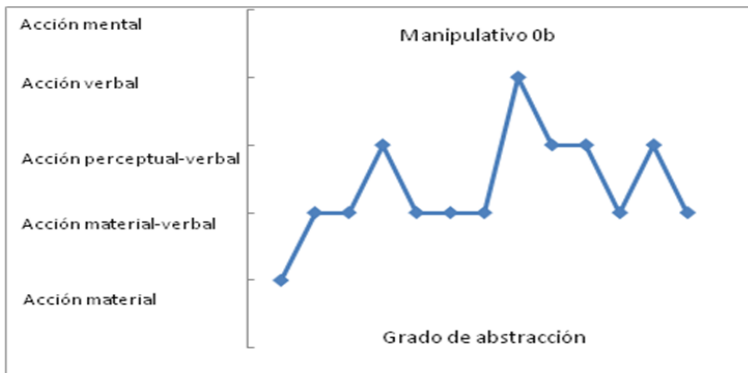
Grado de consciencia o despliegue	Al principio, mientras E explora el manipulativo y ante las primeras preguntas de P no descubre la intención ni las respuestas, la expresión de E no es clara ni inteligible. Después de varios intercambios infructuosos que tratan de aclarar el objetivo y la dinámica del manipulativo, E pregunta si se dispone de otro punto diferente al de tangencia, cosa que es es muy importante, y mejora a claridad de la expresión. La mediación de P, que trata de focalizar la atención en aspectos más específicos que lleven a E a entender las relaciones del manipulativo, hace que la claridad mejore y E encuentre las primeras relaciones. La claridad fluctúa en niveles medios y altos hasta que E piensa que msec va disminuyendo, lo cual es un caso particular, en vez de que fijarse en que disminuye delta x. La claridad disminuye a nivel bajo. P tiene que preguntar directamente qué es lo que está disminuyendo, y sigue haciendo preguntas que focalizan las cuestiones importantes, de manera que la expresión fluctúa sólo en niveles medios y alto, terminando en alto cuando P pide que E defina los conceptos tratados en el manipulativo, que fueron los más problemáticos por ser nuevos e incluir ideas sofisticadas, como la de infinitamente pequeño.
Grado de abreviación de la acción en postest 3	El algoritmo fue abreviada desde el postest 2, y es igualmente abreviada en el postest 3, por eso no hay un cambio en la abreviación entre ellos.
Grado de atención o auto-regulación en postest 3	No hay evidencia pero se infiere un grado alto de los resultados del postest 3
Grado de flexibilidad en postest 3	Aplica la misma estrategia que en el problema del postest 1 y 2.
Grado de entendimiento o insight en postest 3	No muestra errores estructurales.
Grado de consciencia o despliegue en postest 3	Alto

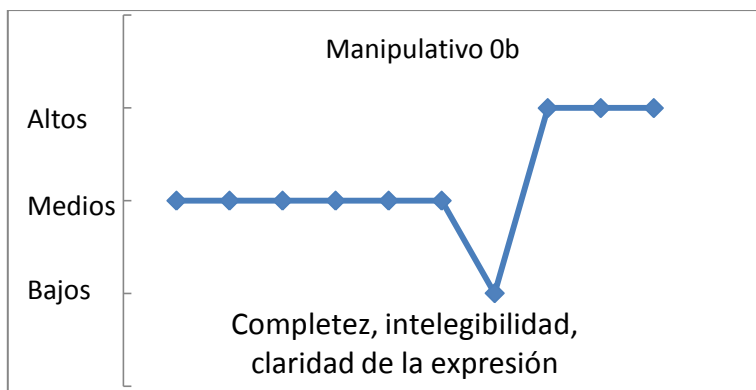
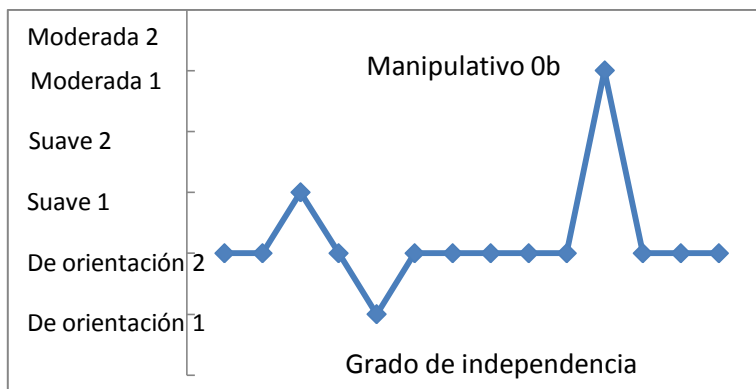
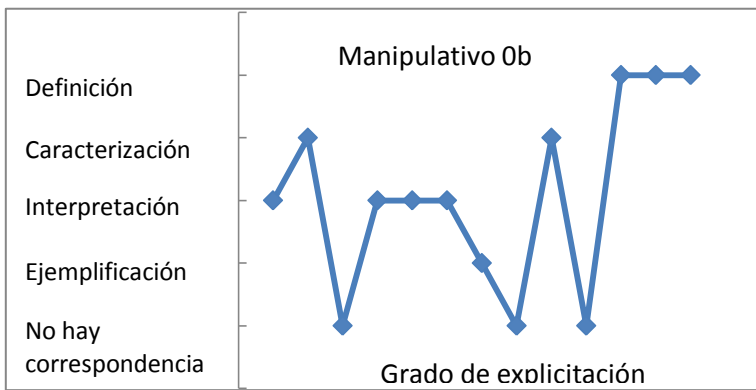
Gráficas de trayectoria de las dimensiones en el Manipulativo 0a:



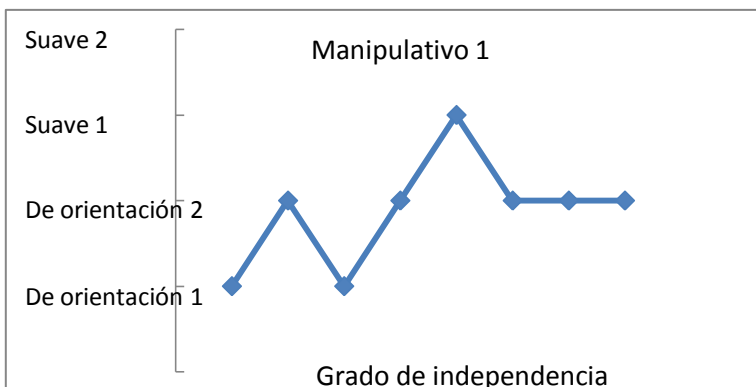
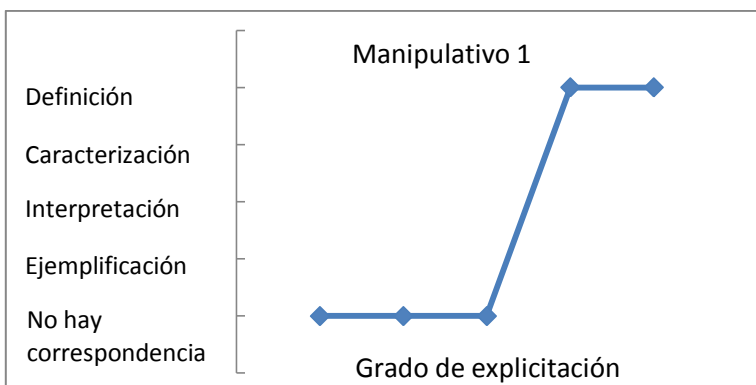
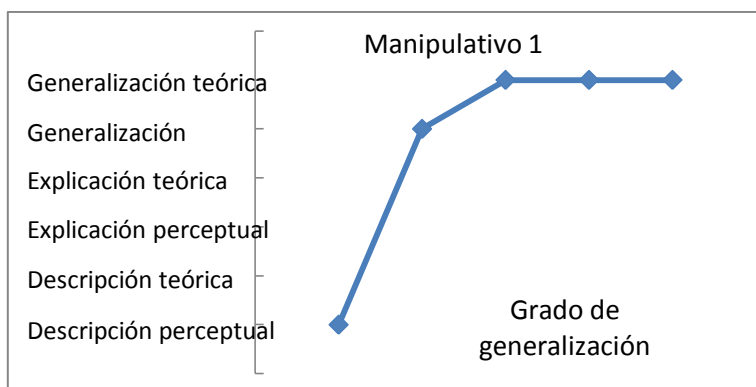
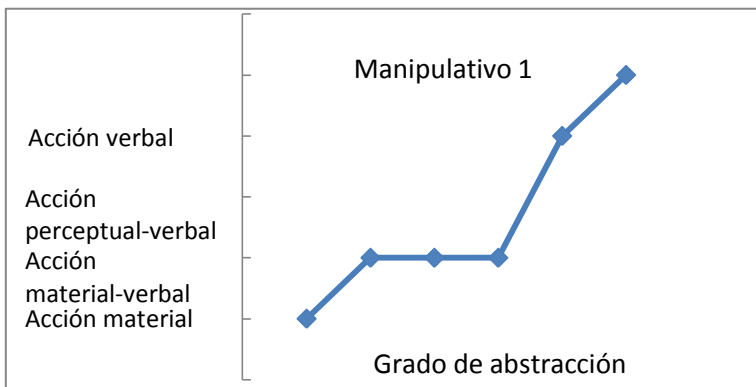


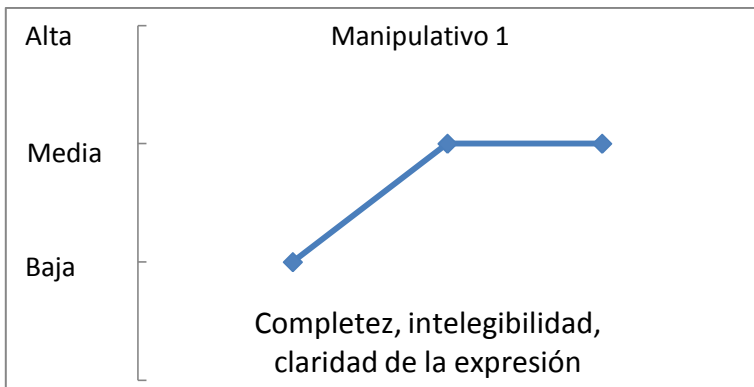
Gráficas de trayectoria de las dimensiones en el Manipulativo 0b:



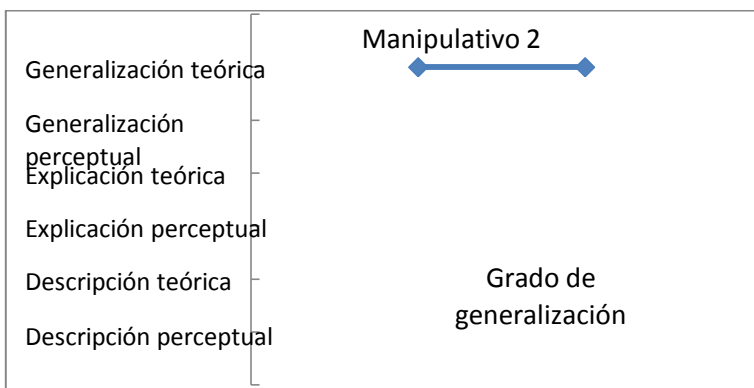
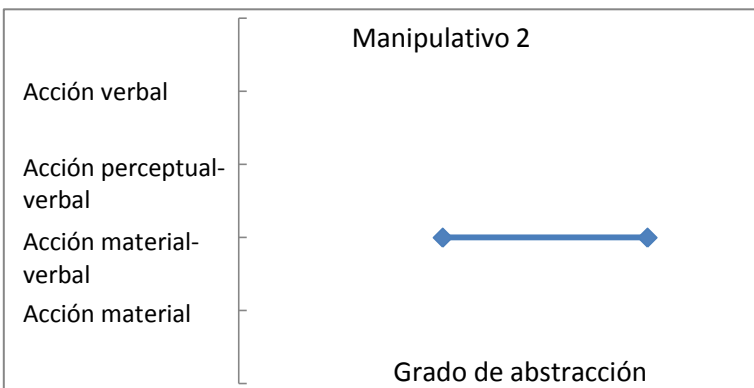


Gráficas de trayectoria de las dimensiones en el Manipulativo 1:

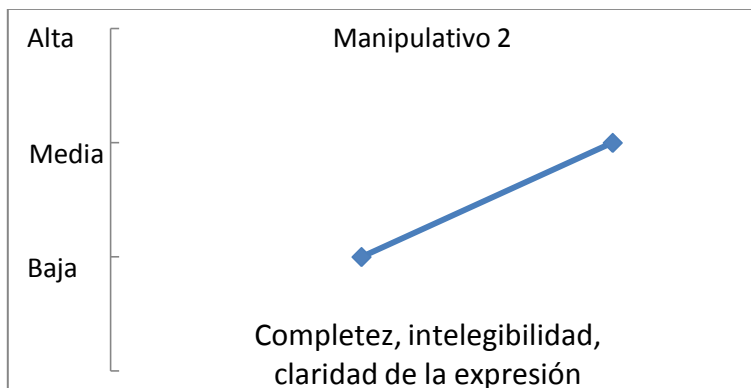
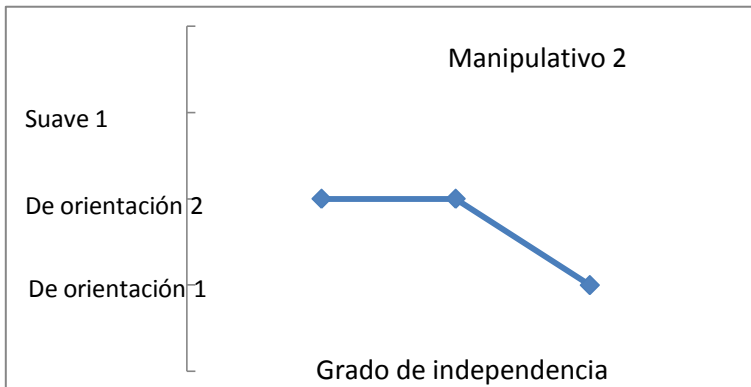
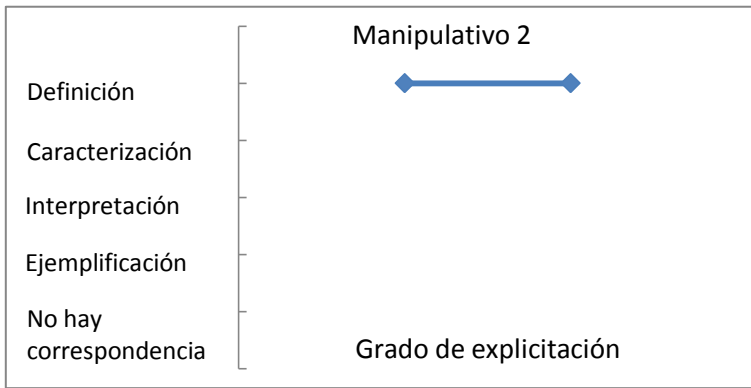




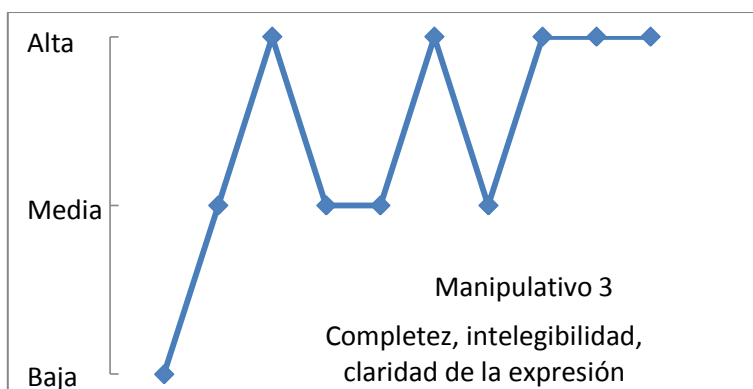
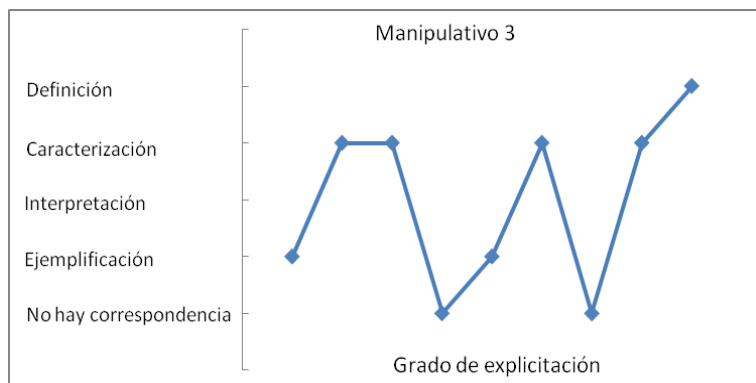
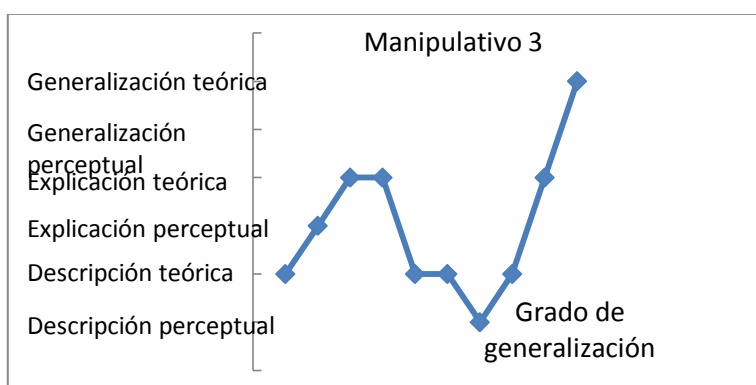
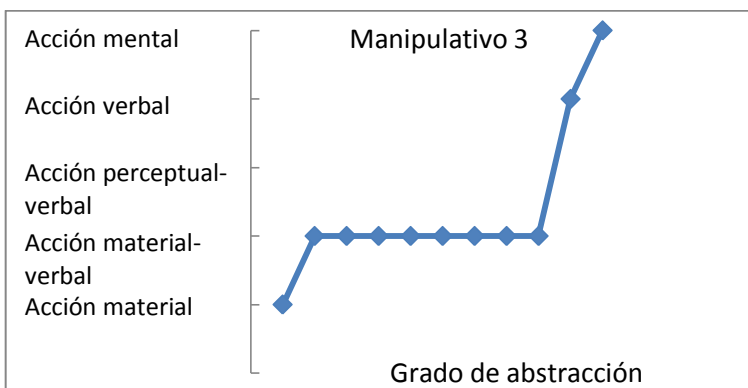
Gráficas de trayectoria de las dimensiones en el Manipulativo 2:

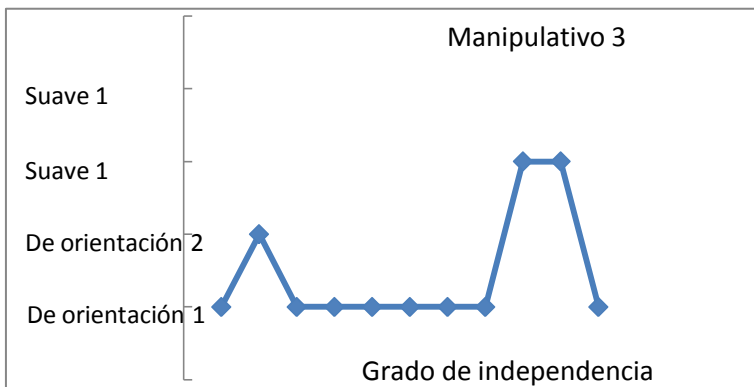




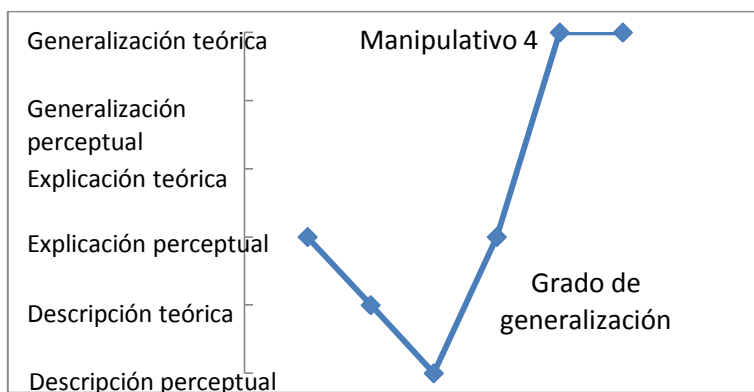
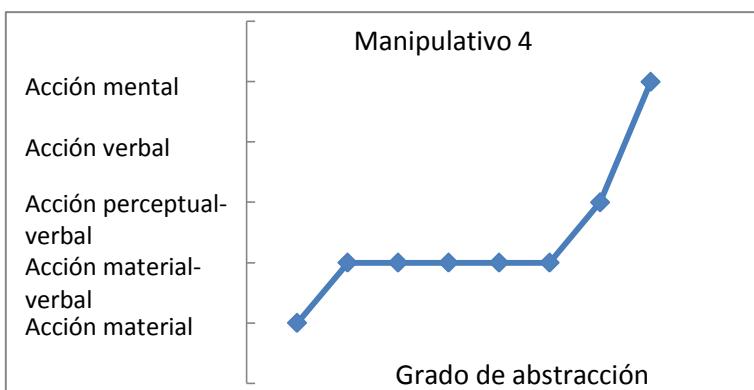


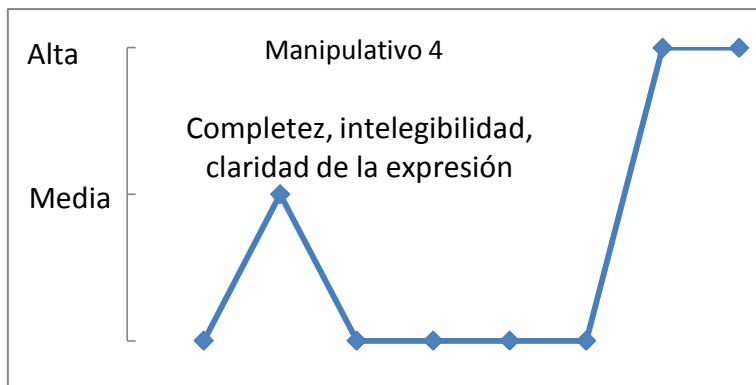
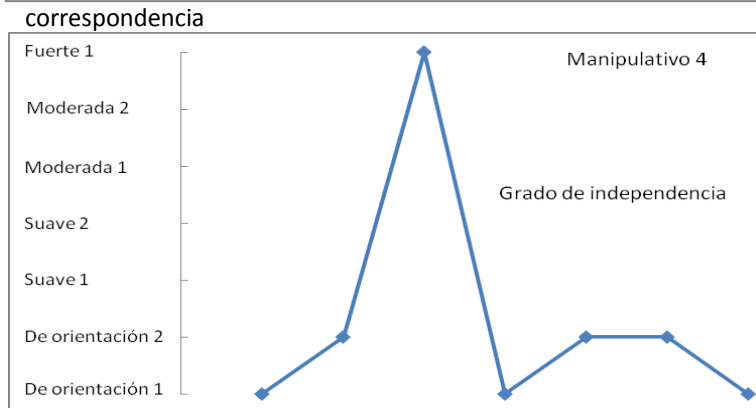
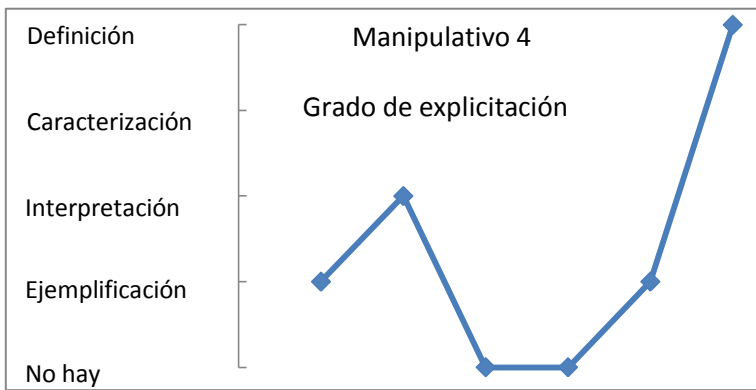
Gráficas de trayectoria de las dimensiones en el Manipulativo 3:



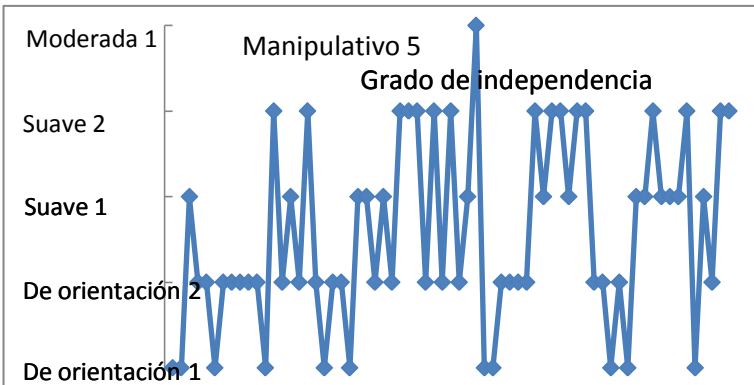
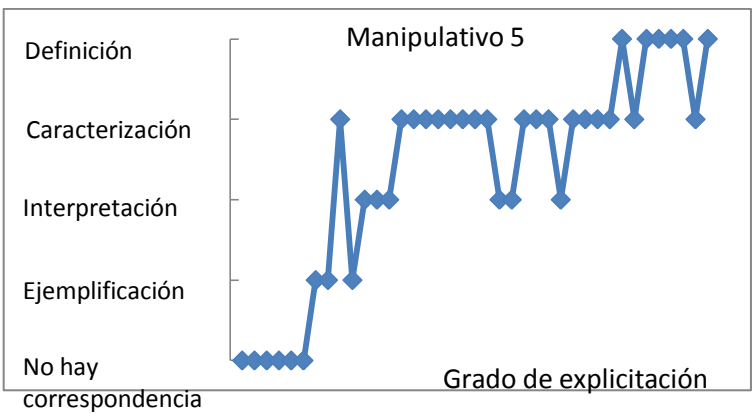
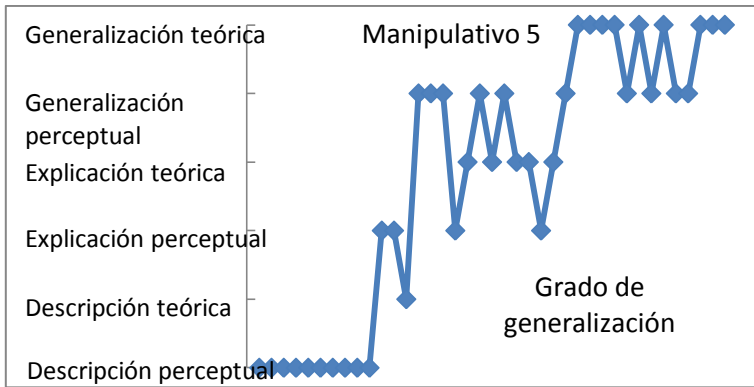
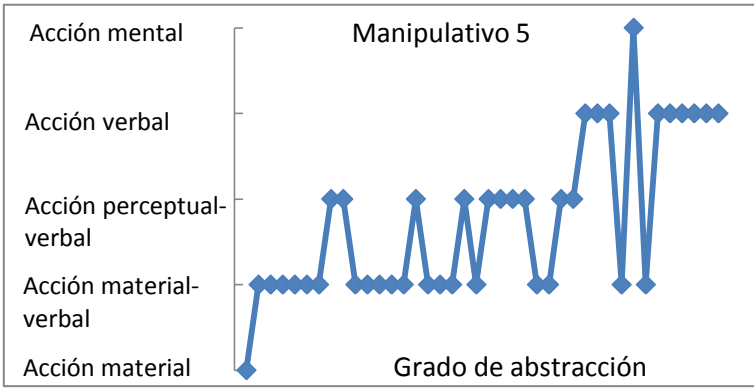


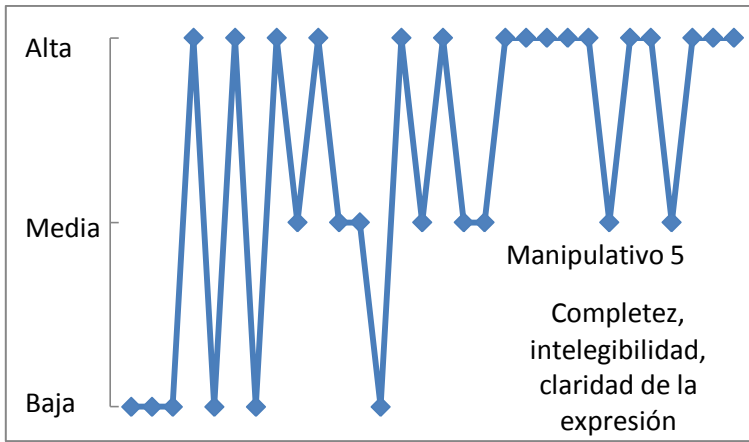
Gráficas de trayectoria de las dimensiones en el Manipulativo 4:





Gráficas de trayectoria de las dimensiones en el Manipulativo 5:





[\(A la tabla de contenidos\)](#)