LA CONSTRUCCIÓN DE UN CONCEPTO MATEMÁTICO

EDUARDO MIRANDA MONTOYA*

El desconocimiento de una didáctica especial para entender los conceptos matemáticos, aun para muchos profesores con amplio conocimientos en la materia, hace fracasar a muchos estudiantes.[1] En este sentido, las matemáticas educativas emergen como una disciplina científica orientada a entender el proceso de enseñanza y aprendizaje, para lo que se auxilian de los contenidos de la psicología, la pedagogía y la sociología, entre otras disciplinas.

En el decenio de los cincuenta, la investigación educativa se hacía bajo el esquema del paradigma agrícola, con el cual se suponía que podían alcanzarse patrones de aprendizaje sustentados en el análisis estadístico de datos obtenidos de un

* Profesor del Departamento de Matemáticas y Física del ITESO. Sus investigaciones actuales están dirigidas a la obtención de modelos de enseñanza para el álgebra lineal.

1. **Fischbein, E.** "Introduction", en Nesher, P. y J. Kilpatrick, *Mathematics and cognition: a research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, University Press, Cambridge, 1990, pp. 1-13.

PARA QUE ALGUIEN SE APROPIE DE UN CONOCIMIENTO ES NECESARIO SEGUIR UNA SECUENCIA DE CONSTRUCCIONES MENTALES

gran número de personas.[2] Sin embargo, este modelo no fue bien aceptado por los investigadores en educación matemática por las dificultades que implicaba controlar las variables y la selección de los grupos de control y experimentales, ya que en un salón de clases no es tan sencillo vigilar estados de ánimo, interés hacia la materia, horas de clase, por citar algunos ejemplos. Además, una vez seleccionados los grupos, uno de ellos recibe todas las atenciones contempladas como variables para mejorar el rendimiento de los alumnos, mientras que en el otro se sigue un tipo de enseñanza normal.

También se han desarrollado otras corrientes teóricas cuya finalidad es averiguar con mayor profundidad cómo es que una persona aprende o se apropia de un concepto matemático. Las investigaciones de Piaget y García[3] dieron sustento y origen a algunos de estos enfoques que dan énfasis al análisis cualitativo del aprendizaje, explorado mediante entrevistas clínicas que investigan el cómo y el por qué se aprende. Entre ellas se pueden mencionar a la teoría de obstáculos epistemológicos,[4] que atribuye la falta de entendimiento a la naturaleza misma de los conceptos —un ejemplo puede ser la comprensión "de lo infinitamente grande o de lo infinitamente pequeño"—, y a la ingeniería didáctica, creada en Francia a partir de los años sesenta del siglo pasado con el propósito de encontrar, científicamente, el mejor procedimiento para enseñar matemáticas a los niños de la escuela elemental (después se llevó a la universidad).[5]

En la ingeniería didáctica estas investigaciones han llevado a desarrollar modelos de aprendizaje de conceptos matemáticos en los que se involucran muchas de las variables que posiblemente intervienen en el aprendizaje, como por ejemplo: el alumno como sujeto que aprende, sus motivaciones, los programas de estudio, las estrategias del profesor, los cambios del discurso en un mismo curso, las concepciones sociales de la materia, la evolución de los conceptos, los obstáculos epistemológicos, etcétera.

Otra corriente sustentada en las teorías de Piaget es el marco epistemológico de las acciones, procesos, objetos y esquemas (APOE) que, comparada con la ingeniería didáctica, resulta de alguna manera más pragmática, puesto que los modelos de enseñanza que investiga no involucran a tantas variables.

EL MARCO EPISTEMOLÓGICO APOE

El APOE se inició en Estados Unidos y se ha extendido a otros países (entre ellos México) a partir de la formación del Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC), cuya investigación está centrada en cómo un sujeto construye conceptos matemáticos y adquiere habilidades para enfrentar y resolver problemas.[6]

En este sentido, las observaciones de los estudiantes han permitido a los investigadores concluir que para que alguien se apropie de un conocimiento es necesario seguir una secuencia de construcciones mentales, las que se describen a continuación:

Acciones

Son una manipulación física o mental sobre objetos. La persona las percibe como algo externo, y cada uno de sus pasos es estimulado por el anterior.

Algunos ejemplos de acciones serían calcular el valor de una función en un número determinado o la derivada de una función. Se dice que un estudiante está en el nivel de acciones cuando, por ejemplo, sólo es capaz de evaluar una función en puntos aislados o derivar funciones particulares. En este caso, no será capaz de comprender aspectos más abstractos del tema que estudie.

Procesos

Se pueden describir como una serie de acciones sobre un objeto, con la particularidad de que el individuo las controla de manera consciente, es decir, puede describirlas paso a paso, invertirlas, coordinar y componer una trasformación con otras para obte-

2. **Schoenfeld, Alan.** *Cognitive science and mathematics education*, Lawrence Erlbaum Associated, Filadelfia, 1987.

3. **Piaget, Jean y Rolando García.** *Psicogénesis e historia de la ciencia*, Siglo XXI, México, 1982.

4. **Sierpinska, Anna.** *Understanding in mathematics*, The Falmer Press, Londres, 1994.

5. **Artigue, Michèle *et al.*** *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, Iberoamérica, México, 1995.

6. **Asiala, Mark *et al.*** *A framework for research and development in undergraduate mathematics education*, Research in Collegiate Mathematics Education II, 1996, pp. 1-32.

ner una nueva. Un estudiante estará en el nivel de procesos cuando logra tabular muchos valores de una función sin hacerlo físicamente (las ha interiorizado en su mente) y, de este modo, descubre su comportamiento cualitativo (si es creciente o decreciente, acotada, etcétera).

Objetos

Cuando una persona reflexiona sobre las operaciones aplicadas en un proceso particular, llega a tomar conciencia de este como una totalidad, sobre el que puede efectuar y construir acciones o trasformaciones; entonces, se dice que ese proceso ha sido trasformado en un objeto. Una persona está en el nivel de objetos cuando interrelaciona las distintas maneras de conceptualizar una función, es decir, si descubre que una función definida como conjuntos de pares ordenados es lo mismo que una gráfica o una fórmula.

Una construcción mental importante, derivada de los objetos, es la capacidad de revertir ciertos procesos para después modificarlos y manipularlos.

Esquemas

Pueden ser una colección de acciones, procesos, objetos y aun otros esquemas (hay una relación dialéctica en espiral, pues los objetos pueden ser trasformados por nuevas acciones, lo cual lleva a nuevos procesos, objetos y esquemas).

Un estudiante puede tener un esquema para resolver ecuaciones, que incluye concepciones de lo que significa resolverlas, junto con varios métodos de solución o trasformación de las mismas. Asimismo, un esquema individual para la derivación puede incluir varios métodos para encontrar la derivada de una función.

Las descripciones anteriores dan pie para explicar cómo es que una persona aprende o construye un concepto matemático que, como ya se observó, comienza con ciertos objetos sobre los que se ejercerá cierto número de acciones hasta que llegue a interiorizarlas, es decir, formar un proceso, y las convierta en un concepto; o bien que utilice esas acciones para coordinarlas con otras y construir nuevos conceptos: un sujeto construye muchos esquemas que pueden coexistir entre sí con el desarrollo del conocimiento, además, cada uno de ellos está constituido de acciones, procesos, objetos, esquemas mismos, así como de relaciones entre esas construcciones mentales.

LA DESCOMPOSICIÓN genética de un tema es un modelo del entendimiento en el que se proponen y muestran las posibles construcciones mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas)

LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN EL AULA

Una vez que se ha detectado el tema sobre el que se quiere investigar, se tiene el reto de aplicar una pedagogía efectiva del concepto a enseñar, que empieza con el diseño de una descomposición genética del tema, la cual es un modelo del entendimiento en donde se proponen y muestran las posibles construcciones mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas) que tiene que realizar un estudiante para llegar a apropiarse de un conocimiento, así como sus orígenes y las relaciones con otras estructuras que se deben poseer.

El diseño de una descomposición genética se origina en los siguientes puntos:

- Análisis del concepto: se parte de los entendimientos y creencias del profesor-investigador.
- Diseño de la instrucción: se hace bajo el supuesto de que para aprender matemáticas debe haber una reflexión, un contexto social, así como construcciones y reconstrucciones. El estudiante tendrá que ser consciente de lo que está haciendo cuando resuelve un problema e inducirlo a construir nuevos conceptos. Además, el diseño no supone que se aprenda linealmente sino que deben haber construcciones iniciales que involucran entendimientos parciales del concepto, y después con reconstrucciones repetidas del mismo, resúmenes y enlaces de las partes anteriores. Diferentes estudiantes pueden aprender partes del todo en distintos tiempos y, de esta manera, forman su entendimiento de uno u otro concepto poco a poco. El contexto social al que se refiere la teoría está implantado por instrucción mediante grupos de aprendizaje cooperativo. Sus estrategias tratan que el alumno

refleje su trabajo a través de toda la estructura del curso, mediante un ciclo pedagógico consistente en acciones, discusión de clase y ejercicios. Los alumnos son animados a trabajar en grupos en tareas diseñadas para alentar construcciones mentales específicas, sugeridas por la descomposición genética que se creó al comienzo. En las clases ejecutan algún trabajo basado en actividades en equipos, usando lápiz y papel, en donde se llevan a cabo discusiones y, en ocasiones, se dan definiciones, explicaciones y revisiones para enlazar todas las labores que se han realizado. Los ejercicios también son asignados para trabajarlos en grupos y se espera que sean completados fuera de clase como un trabajo adicional, con el propósito de reforzar las ideas que han construido, usar las matemáticas que han aprendido y, algunas veces, comenzar a pensar en situaciones que serán estudiadas más adelante.

> **LOS DATOS SERVIRÁN PARA** incorporarlos a una segunda versión de la descomposición genética y estructurar otra más afinada, que a su vez se someterá a prueba en un rediseño de instrucción

◗ Observación de estudiantes: consiste en la descripción de cómo un sujeto llega a construir cosas para luego entenderlas. Aquí se trata de formular una entrevista para observar sus habilidades, creencias y estructuras cognitivas previas (un inconveniente radica en la dificultad de aplicarla a grupos numerosos, además de que se pueden encontrar muy diversos niveles de conocimientos en los mismos).

Una vez que la posible descomposición genética ha sido diseñada, es experimentada en un grupo y, a partir de distintas evaluaciones, se obtienen datos recolectados en tres formas:

◗ Cuestionarios escritos con preguntas de contenido matemático relativamente estandarizado y analizado con herramientas tradicionales.

◗ Entrevistas a profundidad, que son la parte más importante y difícil de las actividades de observación y asesoramiento, en la que las trascripciones audiograbadas complementan el trabajo escrito, ya que un estudiante puede tenerlo aparentemente correcto, pero en la entrevista puede mostrar poco entendimiento o viceversa.

◗ Una combinación de ambos. Se realiza un cuestionario escrito y las respuestas son usadas para diseñar preguntas en la entrevista, para la que son seleccionados estudiantes de acuerdo a su contestación: correcta, parcialmente correcta o incorrecta.

El estudio de los datos está enfocado a investigar si las construcciones de la descomposición genética diseñada de inicio tienen éxito o están fallando y, en cualquiera de los casos, encontrar explicaciones razonables del por qué de los resultados. De aquí se pueden establecer conjeturas sobre las construcciones mentales que un estudiante puede o debe realizar para entender un concepto.

Los datos servirán para incorporarlos a una segunda versión de la descomposición genética y estructurar otra más afinada, que a su vez se volverá a someter a prueba en un rediseño de instrucción. Así, se logran versiones que van acercando cada vez más a una pedagogía efectiva. ■

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

COTTRILL, Jim et al. "Understanding the limit concept: begining with a coordinated process schema", en *Journal of Mathematical Behavior,* vol.15, 1996, pp. 167-192.

DUBINSKY, Ed. "Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics", en Steffe, Leslie P. (ed.), *Epistemological foundations of mathematical experience,* Springer Verlag, Nueva York, 1991.

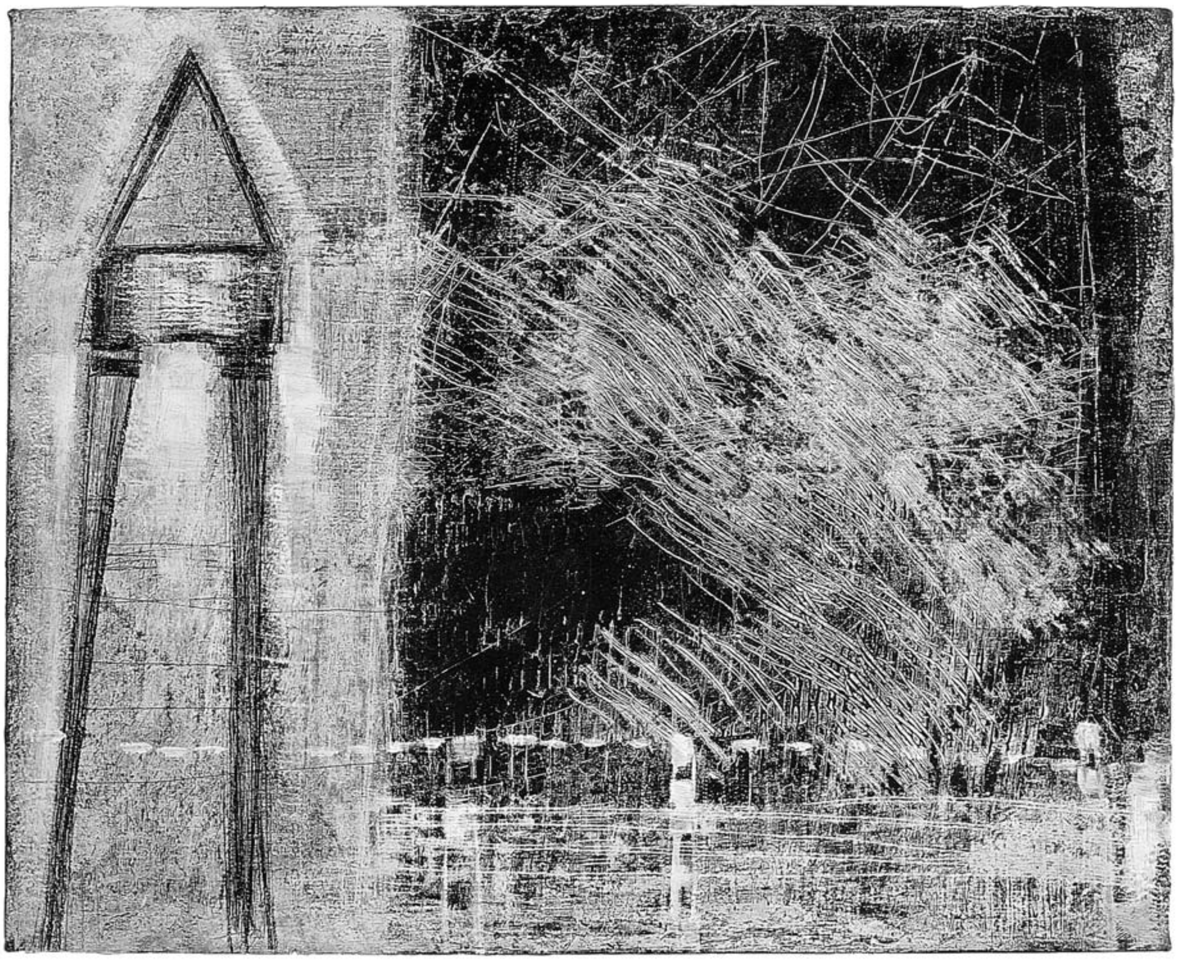
—— "Reflective abstraction in advanced mathematical thinking", en Tall, David (ed.), *Advanced mathematical thinking*, Reidel, Londres, 1991.

DUBINSKY, Ed y P. Lewin. "Reflective abstraction and mathematics education: the genetic descomposition of induction and compactness", en *The Journal of Mathematical Behavior,* 1986 (DE: http://library.usask.ca/ejournals/full.phtml?issn=0732-3123, consultada en abril de 2003).

DUBINSKY, Ed et al. "On learning fundamental concepts of group theory", en *Educational Studies in Mathematics. An International Journal,* vol.27, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994, pp. 267-305.

TALL, David. "The psychology of advanced mathematical thinking", en Tall, David. (ed.), *Advanced mathematical thinking*, Reidel, Londres, 1991.

VINNER, Shlomo. "The role of definitions In the teaching and learning of mathematics", en Tall, David (ed.), *Mathematics education library,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.



ELEVACIONES. ENCAUSTO Y ÓLEO SOBRE PAPEL, 60 x 80 cm, *2002*.