

# Estrategias de Control y Estimación de Estado por Modos Deslizantes para un Horno Eléctrico

\*Michelle Maceas Henao, \*\*Juan Diego Sánchez Torres, \*Héctor Botero Castro

\* Universidad Nacional de Colombia – Sede Medellín. Facultad de Minas.

\*\* Departamento de Ingeniería Eléctrica. CINVESTAV, Unidad Guadalajara.

mmaceash@unal.edu.co  
jdsanch1@gmail.com  
habotero@unal.edu.co

**Resumen**— Este artículo presenta el diseño de un observador por modos deslizantes de segundo orden para una planta con modelo lineal, asumiendo ruido en la variable medida. Adicionalmente se propone un controlador de alto orden por modos deslizantes para una de las variables de estado asociadas al proceso. Para finalizar, se realiza un ejemplo con las respectivas simulaciones.

**Palabras clave**— Observador, Robustez, Modos Deslizantes

## I. INTRODUCCIÓN

En la teoría de control clásica es necesario medir algunas variables en los procesos para lograr implementar las estrategias de control. Sin embargo, el alto costo de implantar sensores por cada variable ha hecho que se busquen alternativas como los observadores de estado. En este artículo se propone una estrategia de estimación de estado y control de un horno eléctrico. Para ello, se propone un observador por modos deslizantes, puesto que este tipo de observadores presentan ciertas ventajas con respecto a los observadores convencionales, como [1]:

- Trabajan con dinámicas de error de observación reducidas.
- Pueden tener convergencia en tiempo finito de todas las variables de estado.
- Poseen robustez ante variación de parámetros si se cumple la condición de ajuste (matching).
- Presentan insensibilidad, más que robustez, con respecto a las entradas desconocidas.

Adicional a esto, se propone un controlador de orden superior por modos deslizantes, ya que presenta robustez ante perturbaciones de diversos tipos, incertidumbres en los modelos y dinámica no modelada [2-5]. Además, dicho

controlador se diseña con algoritmos sencillos, simples de implementar y de baja carga computacional. Otra ventaja de este tipo de controlador es la reducción del *chattering* (vibraciones de alta frecuencia originadas por trabajar con frecuencias de conmutación finitas) mediante la síntesis de acciones de control continuas [6].

## II. MODELO DEL SISTEMA

El modelo de horno eléctrico que trabaja aquí cuenta con tres termocuplas ( $T_1, T_2, T_3$ ), un calefactor ( $U$ ) y se supone que el mismo puede ser perturbado por una temperatura externa ( $T_{ext}$ ), como se muestra en la Figura 1.

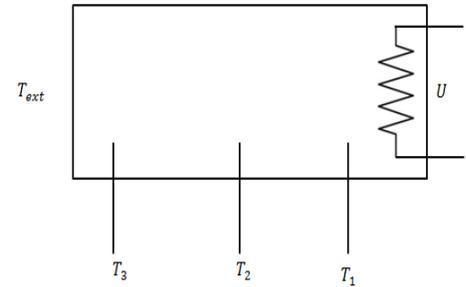


Fig. 1. Esquema del horno eléctrico.

El sistema de ecuaciones (1) presenta los balances de energía que describen el comportamiento del horno eléctrico planteado [7, 8, 9].

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} = \dot{U} - \frac{(T_1 - T_2)}{R_1}$$

$$C_2 \frac{dT_2}{dt} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_1} - \frac{(T_2 - T_3)}{R_2} \quad (1)$$

$$C_3 \frac{dT_3}{dt} = \frac{(T_2 - T_3)}{R_2} - \frac{(T_3 - T_{ext})}{R_3}$$

Donde  $T_i$  representan las temperaturas en cada una de las secciones,  $C_i$  representan las capacidades calorífica,  $R_i$  representan las resistencias térmicas de las secciones y  $U$  es la acción de control.

### III. DISEÑO DEL OBSERVADOR Y EL CONTROLADOR

#### A. Diseño del Observador de Segundo Orden por Modos Deslizantes.

El modelo (1) se puede representar de la forma lineal en variables de estado. Por lo tanto, la dinámica del observador por modos deslizantes es (Levant, 1993):

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} k \\ k * m_1 \\ k * m_2 \end{bmatrix} * |\hat{x}_1|^{1/2} * \text{sign}(\hat{x}_1) + u_1$$

$$u_1 = k_2 * \text{sign}(\hat{x}_1) \quad (2)$$

En este caso se asume como estado medido a  $x_1$ . La dinámica del error es de la forma  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ .

Por lo tanto, para el modelo (1) y el observador (2), la dinámica del error es:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k \\ k * m_1 \\ k * m_2 \end{bmatrix} |\tilde{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1) + u_1$$

$$u_1 = k_2 * \text{sign}(\tilde{x}_1) \quad (3)$$

Para encontrar el valor de las constantes  $m_1$  y  $m_2$  se utiliza el regulador cuadrático lineal (LQR), el cual es un algoritmo matemático que minimiza la función de coste con factores de ponderación proporcionados por el diseñador; en este caso minimizan las desviaciones en el error.

#### B. Diseño controlador de orden superior por modos deslizantes

La variable de estado que se desea controlar es  $x_2$ , por ser la temperatura que representa el núcleo o centro del horno. Para el diseño del controlador se usa la técnica de control a bloques (Loukianov 1998). Para satisfacer la estabilidad de la temperatura  $x_2$ , se define el error de control como:

$$e_2 = x_2 - x_{2ref} \quad (4)$$

La derivada de (4) alrededor de la trayectoria de (1) es:

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \dot{x}_{2ref} \quad (5)$$

$$\dot{e}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 - \dot{x}_{2ref}$$

Para introducir la dinámica deseada se propone  $x_1$  tal que el error en tiempo finito tienda a cero, como se muestra en la ecuación 6:

$$x_{1des} = \frac{1}{a_{21}} (-a_{22} x_2 - a_{23} x_3 + \dot{x}_{2ref} - k_1 e_2) \quad (6)$$

Por lo tanto:

$$e_1 = x_1 - x_{1des} \quad (7)$$

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_{1des}$$

$$\dot{e}_1 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + U + \dot{x}_{1des} \quad (8)$$

Si despejamos  $U$  de la Ecuación (8) encontraremos la ecuación del controlador:

$$U = -(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dot{x}_{1des}) - k_2 \text{sign}(e_1) \quad (9)$$

### IV. EJEMPLO NUMÉRICO Y SIMULACIONES

En la ecuación (10), se observa la representación en espacio de estados del modelo, con parámetros:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} Tex \quad (10)$$

A continuación se detallan los cálculos del observador y del controlador.

#### A. Observador de segundo orden por modos deslizantes

Para el diseño del observador se lleva el modelo de estados a la forma que se mostró en la ecuación (3) y que se retoma aquí:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} k \\ k * m_1 \\ k * m_2 \end{bmatrix} * |\tilde{x}_1|^{1/2} * \text{sign}(\tilde{x}_1) + u_1$$

$$\dot{u}_1 = k_2 * \text{sign}(\tilde{x}_1)$$

Sin embargo, para encontrar los valores de  $m_1$  y  $m_2$ , se debe llevar este sistema a la forma de la Ecuación (11):

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{X}}_1 \\ \dot{\tilde{X}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ k * M \end{bmatrix} * |\tilde{X}_1|^{1/2} * \text{sign}(\tilde{X}_1) + u_1 \quad (11)$$

Donde  $\tilde{X}_1$  es el vector de estados medidos ( $\hat{x}_1$ ) y  $\tilde{X}_2$  son los estados observados ( $\hat{x}_2, \hat{x}_3$ ). Para analizar cómo encontrar el valor de las constantes mi, es necesario hallar la dinámica del error de la ecuación (11), que viene dada por:

$$\dot{\tilde{X}}_1 = A_{11} \tilde{X}_1 + A_{12} \tilde{X}_2 - k * |\tilde{X}_1|^{1/2} * \text{sign}(\tilde{X}_1) - u_1 \quad (12)$$

$$\dot{u}_1 = k_2 * \text{sign}(\tilde{X}_1)$$

$$\dot{\tilde{X}}_2 = A_{21} \tilde{X}_1 + A_{22} \tilde{X}_2 - k * M * |\tilde{X}_1|^{1/2} * \text{sign}(\tilde{X}_1) - u_1 \quad (13)$$

La ecuación (12) indica que después de un tiempo finito  $\tilde{X}_1 = X_1$ , por lo tanto  $\tilde{X}_1, \dot{\tilde{X}}_1$  son iguales a cero, y de esta manera se obtiene:

$$u_1 = A_{12} \tilde{X}_2 \quad (14)$$

Si se reemplaza (14) en (13), se obtiene:

$$\dot{\tilde{X}}_2 = (A_{22} - M * A_{12}) \tilde{X}_2 \quad (15)$$

$$\text{Donde } A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ y } A_{12} = [a_{12} \ a_{13}]$$

Remplazando lo respectivos valores de la ecuación (15), se obtiene la ecuación (16), que permite hallar los valores de las constantes  $m_1$  y  $m_2$ :

$$\begin{bmatrix} p_{1des} \\ p_{2des} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Con lo cual se obtiene  $m_1 = 0.2756$  y  $m_2 = 0.0892$ . Adicionalmente, se asume  $k=1$  y  $k_2=2$ , para que el sistema de error entre en modos deslizantes. Los resultados de simulación del observador se muestran en la Figura (2).

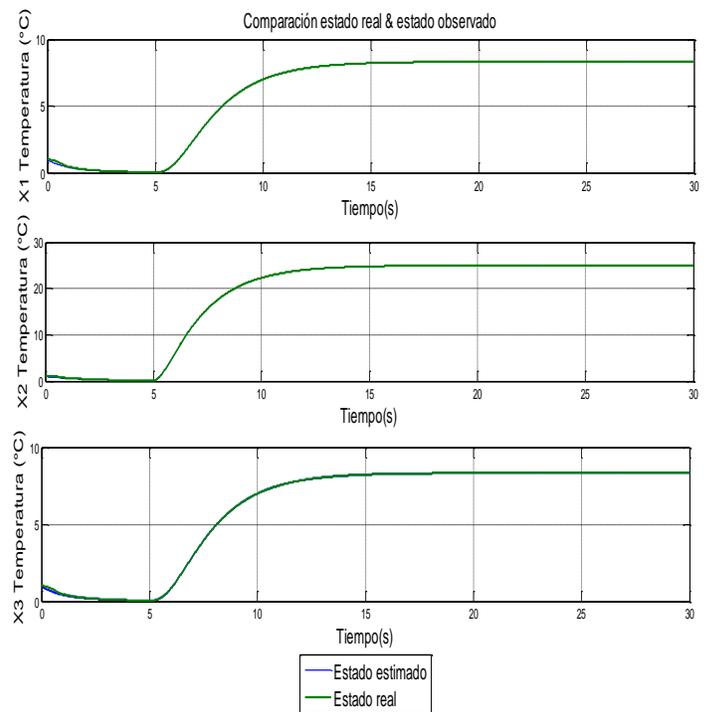


Fig. 2. Comparación de cada estado con su respectiva observación.

Como se puede ver en las Figuras anteriores, el diseño del observador logra respuesta con error cero en la estimación para todas las variables de estado y un tiempo de convergencia muy bajo. Para probar condiciones de ruido, en las Figuras 3,4 y 5 se muestran los distintos estados asumiendo ruido de medición. Al igual que en la Figura 2 se nota que el observador por modos deslizantes de segundo orden presenta un buen desempeño.

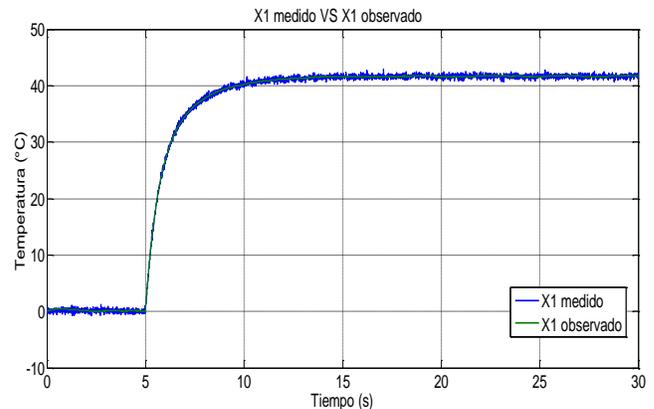


Fig. 3..

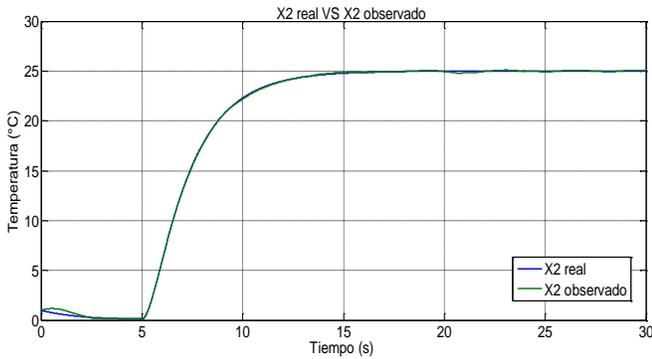


Fig. 4. Comparación de  $x_2$  medido vs  $x_2$  estimado.

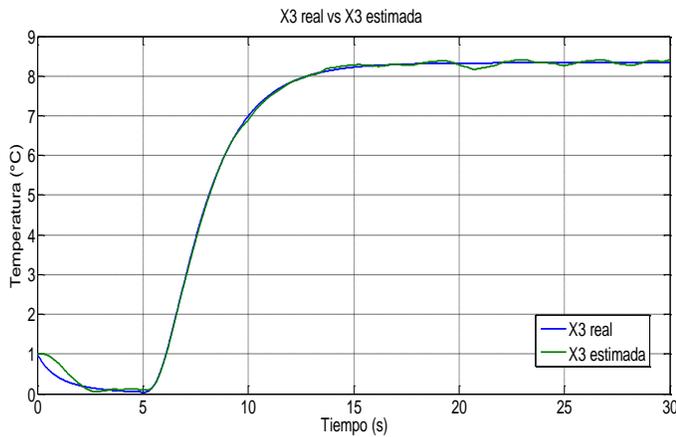


Fig. 5. Comparación de  $x_3$  medido vs  $x_3$  estimado.

### B. Controlador de orden superior por modos deslizantes

El diseño del controlador para la temperatura  $x_2$  se realizó como se explicó en la sección anterior, obteniéndose la acción de control (9). En las Figuras 5 a 7 se observa cómo el controlador sigue la referencia deseada y cómo responde ante perturbaciones.

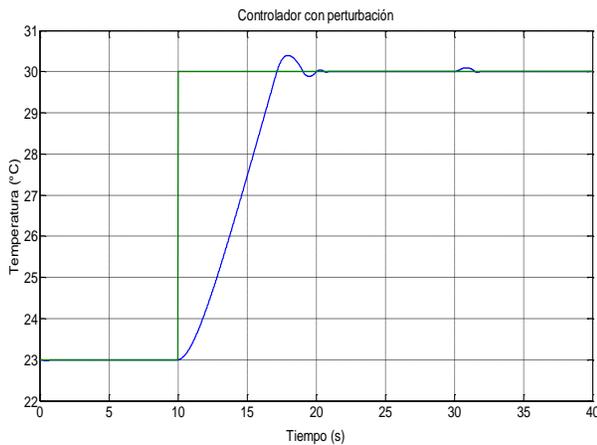


Fig 5. Respuesta del Controlador con perturbación a los 30 s del 20 % del valor de estado estacionario.

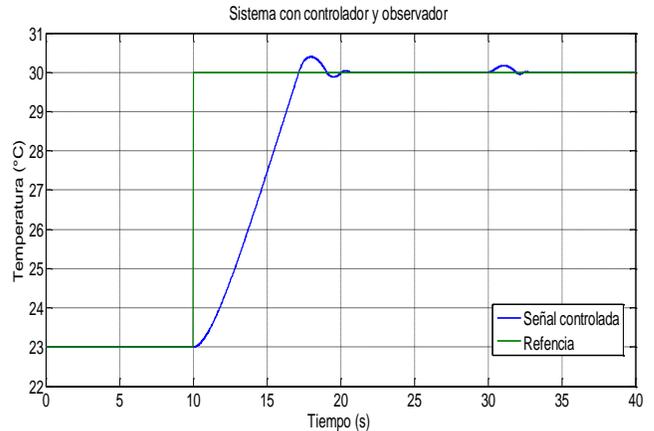


Fig. 6. Sistema con controlador y observador.

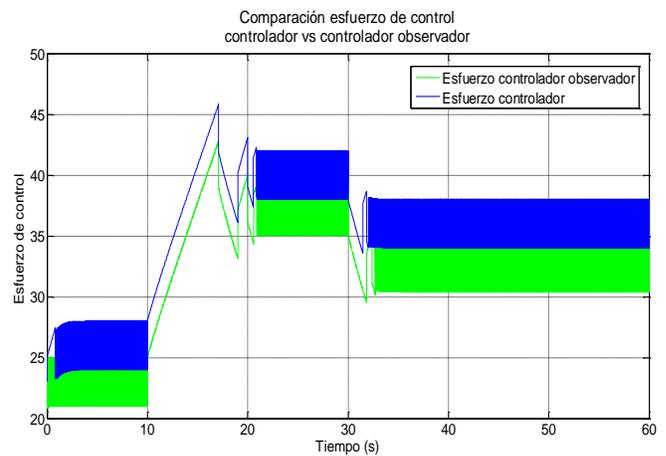


Fig. 7. Comparación esfuerzos de control con observador y sin este.

Como se puede ver, el sistema responde muy bien, aun cuando el controlador supone como variables medidas las variables estimadas. El sobreimpulso inicial es aproximadamente igual cuando se prueba el controlador con las variables del modelo y con las variables estimadas, lo cual muestra el buen funcionamiento del observador.

Finalmente, en la Figura 7 se puede observar una comparación de los esfuerzos de control del sistema con la perturbación. Es evidente que el esfuerzo de control con el observador de segundo orden es menor que en ausencia de este, esto se debe a que el observador asume como conocida la perturbación, y por lo tanto es menor el esfuerzo para rechazarla.

## IV CONCLUSIONES

En este trabajo se propuso un esquema de estimación y control por modos deslizantes para un horno. Los resultados del esquema propuestos fueron buenos, lo cual se verificó

mediante simulación analizando la dinámica del error de estimación y la dinámica de error de seguimiento de la referencia. Para ambas dinámicas se logró un seguimiento con bajo tiempo de establecimiento, bajo sobreimpulso y error de estado estacionario cero. Adicionalmente, el esquema se probó ante situaciones de ruido en el sensor, con resultados satisfactorios. En este sentido, se pudo ver que el observador por modos deslizantes puede ser utilizado como un filtro, puesto que en presencia del ruido en el sensor, la variable estimada tuvo menor varianza que la variable medida.

Finalmente, se pudo analizar que en presencia de perturbación es mejor utilizar el sistema con observador, puesto que este garantiza un menor esfuerzo de control y por lo tanto ahorro de energía en el proceso.

#### AGRADECIMIENTOS

La pasantía del segundo autor en Colombia se realizó con el apoyo del proyecto de Movilidad Internacional de la Diáspora Científica de Alto Reconocimiento (2012-Colciencias) – Banco Mundial.

#### REFERENCIAS

- [1] Osorio - Giraldo, Bertulfo, “*Observador de Estado Mediante Modos Deslizantes de Alto Orden para Procesos no Lineales*”, Tesis de Maestría Universidad Nacional de Colombia. 2012.
- [2] Evangelista C.A., Valenciaga F. y Puleston P.F. “*Control multivariable por modos deslizantes de segundo orden para un sistema eólico basado en un generador de inducción de doble salida*”, 2011.
- [3] H. Ríos, J.A. Rosales, A. Ferreira, R. Iriarte, *Control robusto por salida basado en un Observador por Modos deslizantes para un Helicóptero de 3 grados de libertad*, 2009.
- [4] Michael Basin, Jesus Rodríguez Gonzalez, Pedro Acosta, Leonid Fridman, “*Optimal and Robust Sliding Mode Regulator for Linear Systems with Delayed Control*”, vol 9, 2005.
- [5] A. G. Loukianov, “*Robust block decomposition sliding mode control design*,” *Mathematical Problems in engineering*, vol. 8, no. 4-5, pp.349–365, 2002.
- [6] A. Levant, “*Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control*”, *Int. J. Control*, vol. 58, pp.1247 - 1263, 1993.
- [7] C. Alberto and O. Hincapié, “*Estudio dinámico de un horno de resistencias eléctricas convertido a gas*” *Sci. Tech. Año XV*, no. 42, pp. 339–344, 2009.
- [8] J. J. Marulanda-durango, “*Estimación de los Parámetros de un Modelo de un Horno de Arco Eléctrico Usando Máxima Verosimilitud*,” *Rev. Tecno Lógicas*, no. 29, pp. 69–89, 2012.
- [9] C. M. Sierra and F. Chejne, “*evolución de la temperatura en hornos eléctricos mediante balances de materia y energía*,” *Energética* 34, 2005.